حساب التفاضل والتكامل



حساب التفاضل والتكامل

تأليف

حسين رجب محمد

دار الفجر للنشر والتوزيع

رقم الإيداع

٩٩/١٠٩٩٠

الترقيم الدولى .I.S.B.N

977-5499-19-4

الطبعة الثالثة ٢٠١٠ م

دار الفجر للنشر والتوزيع

4 شارع هاشم الأشقر – النزهة الجديدة – القاهرة

تليفون: 26242520 – 26246252 (00202) فاكس: 26246265 (00202)

www.daralfajr.com

E-mail: daralfajr@yahoo.com

إهداء

إلى زوجتي .. صاحبة القلب الكبير

إلى رفيقة عمري وأم أولادي

.. أهدي هذا الكتاب .



بسم الله الرحمن الرحيم

وقل ربي زدني علماً

صدق الله العظيم

مقدمة

الحمد لله على ما وفقني إليه في إعداد وتأليف كتابي هذا (حساب التفاضل والتكامل) ، وقد أعد هذا الكتاب استكمالاً لكتابي السابق (أساسيات الرياضيات – الجبر والهندسة التحليلية و الإحصاء) ، حيث يمثل علم الرياضيات دوراً هاماً في التكنولوجيا الحديثة والحضارة ودعامتها في كافة ميادين العلم .

ويسرني أن أقدم إلى زملائي أساتذة المادة وإلى أبنائي طلاب الفصول الأولى بالمعاهد العليا المختلفة والجامعات .

لقد روعي عند إعداد هذا الكتاب أن يكون مرجعاً شاملاً يغطي موضوعات منهج هذه المرحلة .. إحساساً مني بحاجة الطالب إلى مثل هذه المعلومات ، حيث يحتوي على المشتقات الجبرية الأسية واللوغاريتمية والمثلثية ، والقيم العظمى والصغرى ، وقانون القيمة المتوسطة ، والمعادلات الخاصة بذلك مع العديد من التطبيقات .

كما يعرض التكامل حيث المعنى الهندسي للتكامل ، وطرق التكامل المختلفة المستحدثة وتطبيقات على التكامل لإيجاد المساحات والحجوم، مع عروض العديد من الأمثلة المحلولة والتمرينات والاختبارات ذات العلاقة

حيث لا ترسخ المعلومات في الأذهان إلا بكثرة التطبيق عليها ، فإذا أستوعبها الطالب جيداً .. فأنها ترسم له طريقاً سهلاً واضحاً للاستمرار في النجاح في كافة المجالات الرياضية والعلمية .

يسرني أن أتقدم بوافر شكري وعمق تقديري لكل من قدم لي نصح أو عون أو مشورة ..أدى إلى ظهور الكتاب بهذه الصورة المشرقة، وأخص بالذكر الأخ/احمد زكي حلمي والأخ/حمدي عامر.

ولا يفوتني أن أتقدم بالشكر إلى من اسهم في تقديم هذا العمل إلى القارئ، أخص بالذكر الناشر العربي (دار الفجر للنشر والتوزيع) الأستاذ/عبد الحي احمد فؤاد. أمل أن يكون هذا الكتاب عوناً ومرجعاً ومستنداً للطالب العربي، راجياً أن يحقق ما نصبوا أليه من رفع المستوى العلمي للطالب العربي، كما أرجو أن أكون قد وفقت في إضافة جديدة إلى المكتبة العربية.

والله ولى التوفيق،،

المؤلف

الباب الأول

التفاضل



ميل المماس لمنحنى

إذا كان $y = f(x)$ يمثل منحنى الدالة، وكان النقطتين $P(x_o , y_o)$
$Q(x_o + \ x , y_o + \ y)$

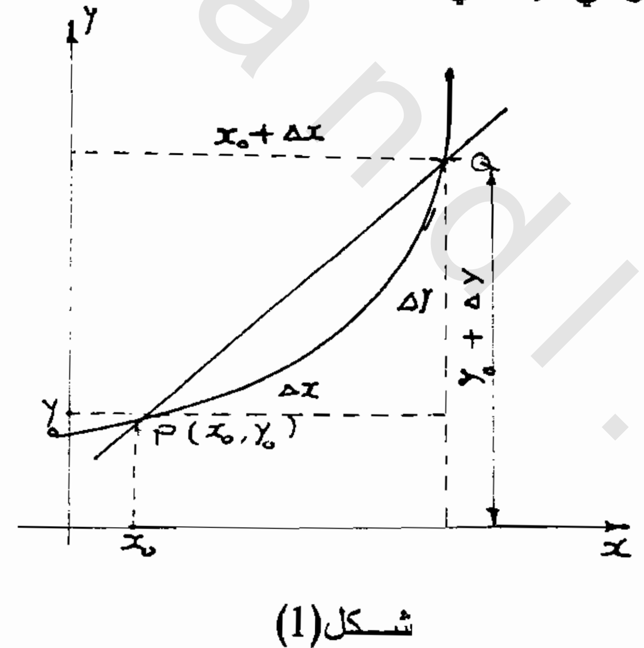
واقعين على المنحنى شـكل(1) فأن PQ يكون قاطعاً للمنحنى

وميله m_s :

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

y التغير في الإحداثي y

x التغير في الإحداثي x



شـكل(1)

بفرض أن النقطة P ثابتة على المنحنى،النقطة Q تتحرك على المنحنى في اتجاه P إذاً ميل القطع PQ يتغير على المنحنى،.
وعندما تقترب النقطة P قرباً كافياً من النقطة Q فإن القيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تصل إلى قيمة محددة حيث x اقتربت من الصفر ويصبح PQ في هذه الحاله مماســاً للمنحنى عند P أي أن ميل المماس m :

$$m = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{\Delta x \to 0}$$

مثال1: إذا كان :

$$y = x^3 - 3x + 3$$

فأوجد ميل المماس للمنحنى عند النقطة : $x = 0$، $x = 1$

الحل:

بفرض أن$P(x_o , y_o)$، $Q(x_o + \ x, y_o + \ y)$ نقطتين على

$$\therefore \quad y_0 = x_0^3 - 3x_0 + 3$$

$$\Delta y + y_0 = (x_0 + \Delta x)^3 - 3(x_0 + \Delta x) + 3$$

$$= x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 3$$

$$\therefore \Delta y \quad = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)$$

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad = 3x_o^2 + 3x_o(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 3$$

فيكون ميل القاطع m_s. حيث : m_s ميل القاطع للمنحى

نجعل Q تقترب من P على طول المنحنى فيقترب كل مــن Δy و Δx من الصفر. فتكون القيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غير محدده. ولكن نجد

كمية $3x^2 - 3 \rightarrow$ ثابته

$3x^2 \cdot \ x + \ x \rightarrow$ صفر

الطرف الأيمن يساوي المقدارين التاليين:

أي أن نهاية m_s عندما Δx تقترب من الصفر تساوي $3x_o^2-3$

وفي هذه الحالة

يصبح $m= m_s$

$$\therefore \ m = 3x_o^2 - 3$$

حيث m هو ميل المماس للمنحنى عند $P(x_o , y_o)$ ، $\because$ $(x_o ,$ $y_o) P($ هي أي نقطة على المنحنى فإنه يمكن أن نحذف الدليــل وتكتــب كالتالــي :

$$m = 3x^2-3$$

بالتعويض عن x=o يكون ميل المماس للمنحنى عندهــا يســاوي:

$m = 3(o)-3 \quad = -3$

بالتعويض عن $x=1$ يكون ميل المماس للمنحنى عندها يساوي :

$m = 3 (1) - 3 = 0$

مثال **2** :

أوجد ميل المنحنى (ميل المماس للمنحنى) للدالة $f(x)$

حيث :

$f(x) = y = x2 - 2x - 3$

ثم أوجد النقط التي يكون فيها المماس أفقياً مع رسم الدالة بيانياً .

الحل : بفرض أن $P(x , y)$ نقطة على المنحنى

$$\because \quad y = x^2 - 2x - 3$$

$$\Delta y + y = (x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - 3$$

$$= x^2 + 2x . \Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2 \Delta x - 3$$

$$\therefore \Delta y = 2x . \Delta x - 2 \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 2 + \Delta x$$

وحيث أن ميل المماس للمنحنى هو $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تقترب Δx من الصفر .

$$\therefore m = (\frac{\Delta y}{\Delta x})_{\Delta x = 0}$$

$$= 2x - 2$$

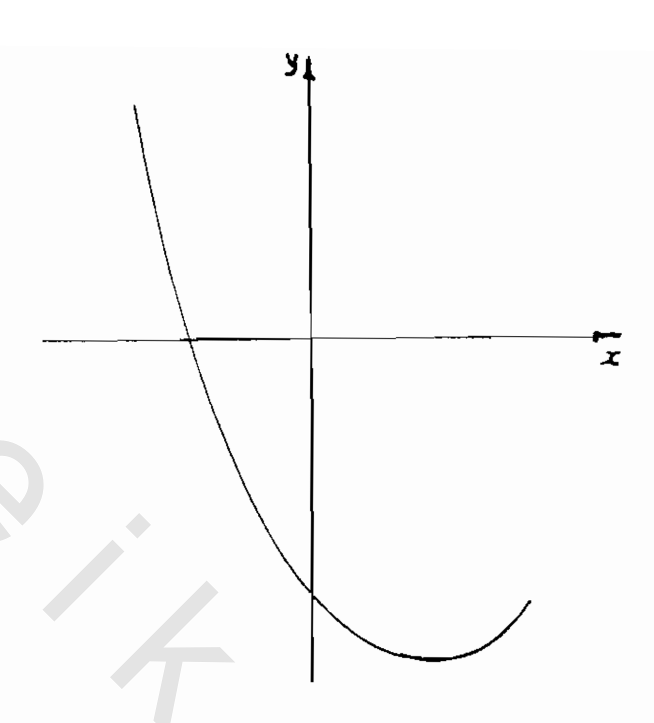
ويكون الميل أفقياً عندما $m = 0$

$\therefore\ 2x - 2 = 0$

$\therefore\ x = 1$

x	−2	−1	0	1	2
y	5	0	-3	-4	-3

ويوضح الجدول بيانياً الذي يوضحه شكل ٢



شـــكل 2

مثال 3 :

أثبت أن لمنحنى الدالة في المثال السابق مماساً عند $x = 2$. ثم أوجد معادلته .

الحل :

بالتعويض في معادلة المنحنى عن $x = 2$ لإيجاد قيمة y :

$$\therefore f(x)=y=(2)^2-2(2)-3=-3$$

ويكون المطلوب هو إثبات أن لمنحنى الدالة $f(x)$ مماس عند

النقطة $P(2,-3)$ ، وعلى فرض أن المماس هو m حيث

$m = 2x-2$

$= 2(2) - 2 = 2$ بالتعويض عن $m = 2$

وعلى هذا يكون لمنحنى الدالة مماس ميله = 2 ويمر بالنقطة $P(2,-3)$ ومعادلة هذا المماس هو :

$$\frac{y-(-3)}{x-2} = 2$$

$$y + 3 = 2(x-2)$$

$$y - 2x + 7 = 0$$

مثال 4 :

أثبت بالطريقة الأولية أن لمنحنى الدالة :

$$f(x) = x^3 + 1$$

مماساً عند $x = -1$. أوجد معادلته

الحل :

لإثبات أنه يوجد مماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند $x = -1$ يكون

بإثبات أن قيمه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ معرفة محددة كالأتي :

$$f(x)=x^3+1$$

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3+1$$

$$=x^3+3x^2.\Delta x+3x.(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+1$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$=3x^2.\Delta x+3x.(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x.\Delta x+(\Delta x)^2$$

قيمة ميل المماس عند أي قيمة لـــ x هي قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

عندما $\Delta x \longrightarrow 0$

$$m=\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}=3x^2$$

وحيث أن x تنتمي لجميع الأعداد الحقيقية

∴ مماسات منحنى الدالة $f(x)$ موجودة ومحددة لجميع الأعداد الحقيقية .

∴ عند $x=-1$. يكون الميل هو :

$$m = 3(-1)^2$$
$$= 3$$

$$\therefore f(-1)=(-1)^3+1=0$$

أي أن لمنحنى الدالة $f(x)$ مماساً ميله 3 ويمر بالنقطة $A(-1,0)$

معادلة المماس هي :

$$\frac{y - 0}{x - (-1)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

$$\therefore \; y = 3x + 3$$

مثال 5 :

أوجد باستخدام المبادئ الأولية ميل المماس للمنحنى :

$$y = \sqrt{x}$$

الحل :

بفرض أن $P(x, y)$ أي نقطة على المنحنى :

$$y = \sqrt{x}$$

، $Q(x_o + \Delta x , y_o + \Delta y)$ واقعة على المنحنى وقريبة جداً من P

$$\therefore \; y + \; \Delta y = \sqrt{x_o + \; x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x_\circ + \; x} - \sqrt{x_\circ}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_\circ + \; x} - \sqrt{x_\circ}}{\Delta x}$$

وبالضرب في مرافق البسط :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_\circ + \Delta x} - \sqrt{x_\circ}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x_\circ + \Delta x} + \sqrt{x_\circ}}{\sqrt{x_\circ + \Delta x} + \sqrt{x_\circ}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_\circ + \Delta x} + \sqrt{x_\circ}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_\circ + \Delta x} + \sqrt{x_\circ}} = \frac{1}{2\sqrt{x_\circ}}$$

وحيث أن $P(x, y)$ هي أي نقطة على المنحنى :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تمــــــاريـــــــن (1)

1- أثبت أن هناك مماس لمنحنى الداله المعطاة عند النقاط المعطاة في كل حالة . إذا كان المماس معرفا اكتب معادلته لما يأتي :-

1- $f(x) = 1 - 5x \quad , \quad (0, 1)$

2- $f(x) = x \quad , \quad (2, 4)$

3- $f(x) = x^3 \quad , \quad (0, 0)$

4 - $f(x) = \sqrt{x} + 1 \quad , \quad (4, 3)$

5 - $f(x) = \sqrt{2x - 1} \quad , \quad (1, 1)$

6- $f(x) = \begin{bmatrix} 2x - 1 & \rightarrow & x \leq 1 \\ x + 1 & \rightarrow & x \quad 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (1, 1)$

2-أوجد ميل المماســــــات المنحنى :

$$y = -x^2 + 5x - 6$$

عند النقطة تقاطعه مع المحور x .

3-إذا كان : $y = x2 + 5x - 8$

فأوجد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

عندمـــا تتغير x كآلاتي :-

$x_o = 1 \qquad x_1 = 1.2 \longrightarrow$

$x_o = 1 \qquad x_1 = 0.8 \longrightarrow$

4-جسم يسقط من السكون سقوطا وفقا للعلاقة :

$S = 4.9\ t^2$

حيث S (m) المسافة ، t (s) الزمن بالثانية فأوجد $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

عندمـــا تتغير t كآلاتي :-

$t_o = 3 \qquad t_1 = 3.5 \longrightarrow$

$t_o = 3 \qquad t_1 = 3.1 \longrightarrow$

5-أوجد بالطرق الأولية ميل المماس والنقاط التي يكون فيها المماس أفقيا مع رسم المنحنى في كل حالة :

(a) $y = 2x^2 - x - 1$

(b) $y = x^2 + 4x + 4$

(c) $y = x^3 - 12x$

(d) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

المشتقـــــة

تعريف:

تعرف مشتقة الدالة Y=f(X) بالنسبة لX على انها:

بشرط ان تكون النهاية موجودة.

نلاحظ انه من تعريف المشتقة انها تساوي ميل المماس للمنحنى أي انه:

ميل المماس عند نقطة هو قيمة المشتقة عند نفس النقطة.

ويمكن الاشارة الى ان المشتقة للدالة Y=f(X) بالنسبة ل X تسمى المشتقة الاولى للدالة بالنسبة ل X وتاخذ الرموز:-

$$\frac{d}{dx} f(X), \frac{d}{dx} Y, D_X, Y', f'(x)$$

مثال:

اذا كانت:-

$$Y = f(x) = \sqrt{X} - 1$$

فاوجد قيمة المشتقة الاولى باستخدام التعريف:

الحل : بفرض ان P(X,Y) على المنحنى

$$\therefore \quad Y = \sqrt{X} - 1$$

$$Y + \Delta Y = \sqrt{X + \Delta X} - 1$$

$$\therefore \Delta Y = \sqrt{X + \Delta X} - \sqrt{X}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{X + \Delta X} - \sqrt{X}}{\Delta X}$$

بالضرب في مرافق البسط

$$\therefore \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{X - \Delta X} - \sqrt{X}}{\Delta X} * \frac{\left(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}\right)}{\left(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}\right)}$$

$$= \frac{X + \Delta X - X}{\Delta X \left(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}\right)}$$

$$\left.\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_{\Delta x \to 0} = \frac{1}{\sqrt{X} + \sqrt{X}} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

وحيث أن P(X,Y) هي أي نقطة على المنحنى:

$$\therefore \left.\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_{\Delta x \to 0} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dX} Y = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

مشتقات الدوال الجبرية

تعريف:

يقال لدالة ما أنها قابلة للاشتقاق عند $X = X_0$ اذا كان لها مشتقة عند نفس النقطة. وأيضا أنها قابلة للاشتقاق في فترة ما اذا كان لها مشتقة عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة.

صيغ مشتقات الدوال الجبرية:

1- مشتق أي ثابت يساوي صفر

$$\frac{d}{dx}C = 0$$

حيث C مقدار ثابت

البرهان:

بفرض ان :

Y=C

وهذا يعني ان قيمة Y لاتتوقف على المتغير X

$$\therefore Y + \Delta Y = C$$

$$\therefore \quad \Delta Y = 0$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 0$$

من تعريف المشتقة

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$= 0$$

$$\therefore \frac{d}{dX}C = 0$$

2- مشتق X مرفوع للاس n:

$$\frac{d}{dX}X^n = nX^{n-1}$$

حيث n عدد صحيح موجب

البرهان:

بفرض ان:

$$Y = X^n \text{ ....(1)}$$

أي زيادة في Y مقدارها ΔY يقابلها زيادة في X مقدارها ΔX

$$\therefore Y + \Delta Y = (X + \Delta X)^n = \begin{cases} X + \Delta X & ,n = 1 \\ X^2 + 2X.\Delta X + (\Delta X)^2 & ,n = 2 \\ X^3 + 3X^2.\Delta X + 3X.(\Delta X)^2 + (\Delta X)^3 & ,n = 3 \\ \text{.................................} & \\ X^n + nX^{n-1}.\Delta X + nX^{n-2}(\Delta X)^2 & ,n \end{cases}$$

$$\text{..................(2)}$$

بطرح (1) من (2)

$$\Delta Y = \begin{cases} \Delta X\text{...},n = 1 \\ 2X.\Delta X + (\Delta X)^2\text{..........................},n = 2 \\ 3X^2.\Delta X + (3X + \Delta X) + (\Delta X)^2\text{.......},n = 3 \\ \text{.................................} \\ nX^{n-1}.\Delta X + (\Delta X, X \text{ حدود })(\Delta X)^2\text{...}n \end{cases}$$

$$\text{......................(3)}$$

بقسمة (3) على ΔX

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \begin{cases} 1\text{....................................},n = 1 \\ 2X + \Delta X\text{.........................},n = 2 \\ 3X^2 + (3X + \Delta X) + \Delta X\text{.......},n = 3 \\ \text{.................................} \\ nX^{n-1} + (\Delta X, X)(\Delta X)^2\text{..........}n \end{cases}$$

$$\text{......................(4)}$$

واخيرا

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \begin{cases} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots, n = 1 \\ 2X \ldots\ldots\ldots\ldots, n = 2 \\ 3X^2 \ldots\ldots\ldots\ldots, n = 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nX^{n-1} \ldots\ldots\ldots, n \end{cases}$$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dX} Y = nX^{n-1}$$

حالات خاصة:

(أ)عند n=1

$$Y = X$$

$$\frac{d}{dX} Y = 1$$

(ب)عند n=2

$$Y = X^2$$

$$\frac{d}{dX} Y = 2X$$

وهكذا....

3- اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة ل X فان:

$$\frac{d}{dx} Cu = C \frac{d}{dX} u$$

يمكن بسهولة اثبات هذه الصيغة وذلك بوضع Y=Cu مع استخدام تعريف المشتقة وعلى الطالب اثباته.

4 ـمشتقة مجموع وطرح دالتين منتهيتين يساوي مجموع وطرح مشتقات الدالتين:

وليكن v,u دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة ل X فان:

$$\frac{d}{dX}(u \pm v) = \frac{d}{dX}u \pm \frac{d}{dX}v$$

وعلى الطالب اثبات هذه الصيغة وذلك بفرض $Y=u \pm v$

5 ـمشتقة حاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة لX :

$$\frac{d}{dX}uv = u\frac{d}{dX}v + v\frac{d}{dx}u$$

وعلى الطالب اثبات هذه الصيغة وذلك بفرض Y=uv

نتيجة 1:

اذا كان:

$$u = v = f$$

$$\therefore \frac{d}{dX}f^2 = 2f\frac{d}{dX}f$$

نتيجة 2:

من الممكن استخدام الصيغة السابقة لتشمل ثلاث دوال او اكثر.

نتيجة 3:

اذا كانت u قابلة للاشتقاق بالنسنة لــ X وان n عدد صيحح موجب فعندئذ u^n قابلة للاشتقاق وان:

$$\frac{d}{dX}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dX}u$$

6-إذا كان $Y = \frac{u}{v}, v \neq 0$

$$\therefore \frac{d}{dX}Y = \frac{d}{dX}\frac{u}{v}$$

$$= \frac{v\frac{du}{dX} - u\frac{dv}{dX}}{v^2}$$

7-مشتقة الدالة المرفوعة لأس صحيح سالب :

$$\frac{d}{dX}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dX}u$$

حيث n عدد صحيح سالب

ارشاد: من الممكن اثبات هذه الصيغة وذلك بفرض ان: n=-m حيث m عددا صحيحاً موجبا.

امثلة محلولة

مثال 1:

اوجد المشتقة الاولى لكل من الدوال التالية:

$(a) \quad Y = 5$

$(b) \quad Y = 7X^5$

$(c) \quad 3X^3 + 7X^2 - 5X + 4 \quad = Y$

الإجابة :

$(a) \quad Y = 5$

$Y' = 0$

$(b) \quad Y = 7X^5$

$Y' = 7(5)X^4 = 35X^4$

$(c) \quad Y = 3X^3 + 7X^2 - 5X + 4$

$Y' = 3(3)X^2 + 7(2)X - 5$

$= 9X^2 + 14X - 5$

مثال 2: اوجد المشتقة الاولى للدالة:

$$Y = X^3\sqrt{X}$$

الحل:

$$u = X^3 \quad , \quad v = \sqrt{X}$$

$$u' = 3X^3 \ , \ \ v' = \tfrac{1}{2}X^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$Y = uv$$

$$Y' = uv' + vu'$$

$$= X^3\frac{1}{2\sqrt{X}} + \sqrt{X}(3X^2)$$

مثال 3 :

اوجد المشتقة الاولى للدالة :

$$Y = (3X-1)^2$$

الحل:

$$u = (3X-1)$$

$$\therefore Y = u^2$$

$$Y' = 2u\frac{du}{dX}$$

$$= 2(3x-1)(3)$$

$$= 6(3X-1)$$

مثال 4:

اوجد المشتقة الاولى للدالة:

$$Y = (3X-1)^3$$

الحل:

الحل:

$$Y = (3X-1)(3X-1)^2$$

$$Y' = (3X-1)\frac{d}{dX}(3X-1)^2 + (3X-1)^2\frac{d}{dX}(3X-1)$$

$$= (3X-1)(6)(3X-1) + (3X-1)^2(3)$$

$$= 6(3X-1)^2 + 3(3X-1)^2$$

$$= 9(3X-1)^2$$

مثال 5: اوجد $\frac{dY}{dX}$ للدالة التالية :

$$Y = \frac{5X^2}{X^2+1}$$

الحل:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X^2+1)10X - 5X^2(2X)}{(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{10X^3 + 10X - 10X^3}{(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{10X}{(X^2+1)^2}$$

مثال 6:

اوجد $\frac{dY}{dX}$ للدالة الآتية:

الحـل :

$$Y = \frac{X+1}{\sqrt{X-1}}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\sqrt{X-1}(1) - (X+1)\frac{1}{2\sqrt{X-1}}}{(X-1)}$$

$$= \frac{2(X-1)-(X+1)}{2\sqrt{X-1}\ \ (X-1)}$$

$$= \frac{X-3}{2(X-1)^{\frac{3}{2}}}$$

تمـــاريـــن (2)

1 -باستخدام التعريف اوجد مشتقة الدوال الاتية:

$(a)\quad Y = X^2 + 5X$

$(b)\quad Y = X^3 - 3X^2 - 5X$

$(c)\quad Y = \sqrt{2X+1}$

$(d)\quad Y = \frac{1}{X-2}$

$(e)\quad Y = \sqrt{2+X}$

$(f)\quad Y = \sqrt{X}$

$(g)\quad Y = \frac{1}{X^2}$

2-أوجد المشتقة الأولى لكل من : -

$(a)\quad Y=10X^2+9X-4$

$(b)\quad Y=(X^3-7)(2X^2+3)$

$(c)\quad Y=15-s+4s^2-5s^4$

$(d)\quad Y=\dfrac{8X^2-6X+11}{X-1}$

$(e)\quad Y=\sqrt{(3X+4)(2X-1)}$

$(f)\quad Y=1+\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X^2}$

$(g)\quad Y=\sqrt{\sqrt{X}+\sqrt{X+2}}$

3- يتحرك جسم على خط مستقيم وفق قانون الحركة:

$s=t^3-4t^2-3t$

اوجد: السرعة-العجلة

الزمن الذي تنعدم فيه السرعة-الزمن الذي تنعدم فيه العجلة

4- قذف جسم راسيا لاعلى بسرعة 160 م/ث إلي ارتفاع s :

$s=160t-16t^2$

أ- ما هو اقصى ارتفاع يمكن ان يبلغه و العجلة

ب- ماهي سرعته عندما يصل إلي ارتفاع ٢٥٦م وهو صاعد

5- اذا كانت s(m) تمثل المسافة التقريبية التي يقطعها جسم يسقط من السكون

سقوطا حرا بلأمتار خلال زمن قدره t ثانية وكانت: $s=4.9t^2$

فاوجد: $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ عندما تتغير t من : -

$t_0=3\rightarrow t_1=3.5$

$t_0=3\rightarrow t_1=3.1$

الدوال العكسية : -

لايجاد $\frac{dY}{dX}$ عندما تعطى X=g(Y) باحدى الطريقتين:

(أ) حل المعادلة بالنسبة ل X اذا كان ذلك ممكننا ثم اشتق بالنسبة ل X

(ب) اشتق X=g(X) بالنسبة لY ثم استخدم العلاقة :

dy / dx = 1 / (dx / dy)

مثال 1:

اوجد $\frac{dY}{dX}$ اذا كان : $X=\sqrt{Y+5}$

الحل: الطريقة أ:

$$X^2 = Y + 5$$

$$Y = X^2 - 5$$

$$dY/dX = 2X$$

الطريقة ب:

$$\frac{dX}{dY} = \frac{1}{2\sqrt{Y+5}}$$

$$\frac{dY}{dX} = 2\sqrt{Y+5}$$

$$= 2X$$

اشتقاق دالة الدالة:

اذا كانت Y=f(u) , u=g(X) يمكن الحصول على $\frac{dY}{dX}$ باحدى الطريقتين :

(أ) عبر Y صريحة في X

(ب) استخدام العلاقة (قاعدة السلسلة)الآتية :

$$dY/dX = \frac{dY}{du} \cdot \frac{du}{dX}$$

مثال 2 :

اوجد $\frac{dY}{dX}$ اذا كان :

$$Y = u^2 + 3$$
$$u = 2X + 1$$

الحل : الطريقة أ:

$$Y = u^2 + 3$$
$$= (2X + 1)^2 + 3$$
$$= 4X^2 + 4X + 4$$
$$\frac{dY}{dX} = 8X + 4$$

الطريقة ب:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{du} \cdot \frac{du}{dX}$$
$$\frac{dY}{du} = 2u \quad , \quad \frac{du}{dX} = 2$$
$$\therefore \frac{dY}{dX} = 2u.2$$
$$= 4u$$
$$= 4(2X + 1)$$
$$= 8X + 4$$

المشتقات العليا:

اذا كانت Y=f(X) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لX حينئذ تسمى مشتقتها بالمشتقة الاولى للدالة.

فإذا كانت مشتقتها الاولى هي الاخرى قابلة للاشتقاق بالنسبة لX فان مشتقتها حيئذ تسمى المشتقة الثانية للدالة(الاصلية) ويرمز لها باحدى الرموز التالية:

$$f''(X) \quad , \quad Y'', \frac{d^2Y}{dX^2}$$

وايضا اذا كانت المشتقة الثانية قابلة للاشتقاق بالنسبة ل X فان مشتقتها تسمى المشتقة الثالثة ويرمز لها باحدى الرموز التالية:

$$\frac{d^3Y}{dX^3} \quad , \quad Y''', f'''(X)$$

وهكذا......

الاشتقاق الضمني:

نعلم ان الدوال الضمنية تظهر على الصورة f(X,Y)=0 ويتم الحصول على المشتق Y' باتباع الاتي:-

اعتبر Y دالة في X واشتق المعادلة المفروضة بالنسبة ل X ثم العلاقة الناتجة بالنسبة لـــ Y' .

مثال 1:

اوجد Y' إذا كان:

$$X^2 + Y^2 + XY = 5$$

الحل:

بعمل الاشتقاق بالنسبة ل X مع اعتبار Y دالة في X

$$\therefore 2X + 2YY' + XY' + Y = 0$$
$$Y'(2Y + X) = -Y - 2X$$
$$Y' = \frac{-Y - 2X}{2Y + X}$$

مثال 2:

اذا علمت ان :

$$4X^2+3Y^2=12$$

فاوجد $\frac{dY}{dX}$ عند $X=\frac{3}{2}$

الحل:

بتفاضل (اشتقاق) المعادلة بالنسبة لـــ X مع اعتبار Y دالة في X

$$\therefore 4(2X)+3(2Y)Y'=0$$

$$\therefore Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{-8X}{6Y}$$

لايجاد قيمة Y عند $X=\frac{3}{2}$ يتم التعويض في المعادلة الاصلية.

$$4(\frac{9}{4})+3Y^2=12$$

$$3Y^2=3$$

$$Y=\pm 1$$

$$\therefore Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{-8(\frac{3}{2})}{6(1)}=-2$$

$$Y'=\frac{dY}{dX}=\frac{-8(\frac{3}{2})}{6(-1)}=2$$

تمـــــاريـــــن (3)

1 - اوجد معادلتي المماس والعمودي عليه للدالة f (X) حيث:

$$f(X)=\frac{5X}{X^2+1}$$

عند النقطة A(2,2)

2- اوجد Y' بفرض ان:

$$Y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \quad , \quad u = \sqrt[3]{X^3 + 2}$$

3 - اذا كان : $Y = X^2 - 4 \quad , \quad X = \sqrt{2t^2 + 1}$

فاوجد Y' عند $t = \sqrt{2}$

4 – تتحرك نقطة على مستوي وفقاً للمعادلات:

$$Y = 2t^3 - 6t$$
$$X = t^2 + 2t$$

اوجد Y' عند t=0,2,5

5 – استخدم قاعدة السلسلة لايجاد Y' في كل من :

(a) $Y = \frac{u-1}{u+1}, u = \sqrt{X}$

(b) $Y = u^3 + 4, u = X^2$

(c) $Y = \sqrt{1+u}, u = \sqrt{X}$

16 –اوجد المشتقة الثانية في كل من:

$$Y = \sqrt{2 - 3X^2} \quad , \quad Y = \frac{X}{\sqrt{X-1}}$$

7 – أوجد Y', Y'' في كل من:

(a) $X^2Y - XY^2 + X^2 + Y^2 = 0$

(b) $X^3 - 3XY + Y^3 = 1$

(c) $X + XY + Y = 2$

8- اوجد بطريقتين مختلفتين Y' في كل من:

$$X = \frac{1}{2+Y} \quad , \quad X = (1+2Y)^3$$

9–اوجد Y' اذا كان: $X = \sqrt{1 - Y^2}$

10 - اوجد ميل المنحنى $X = Y^2 - 4Y$ عند نقطة تقاطعه مع المحور Y .

الدوال المتزايدة و الدوال المتناقصة

أولا: الدوال المتزايدة:-

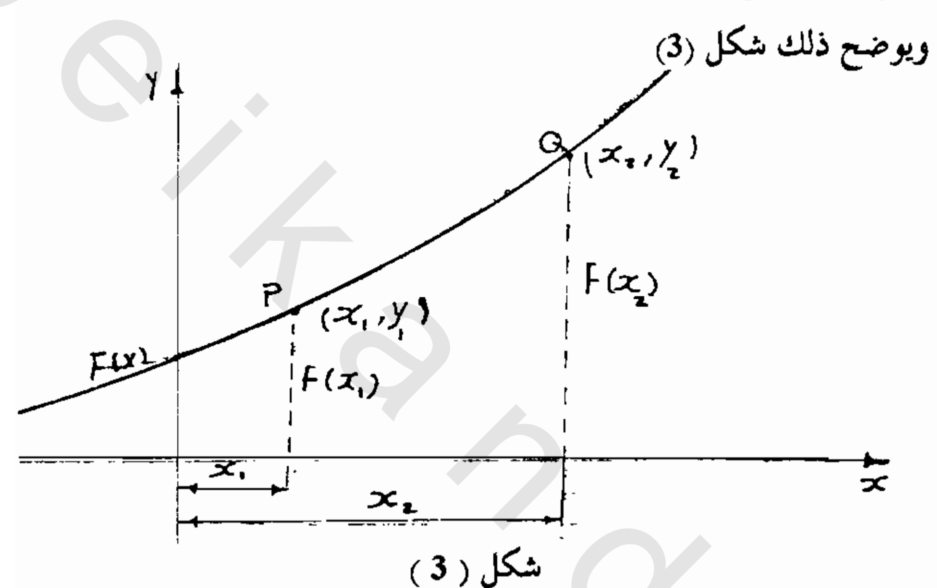
اذا كانت الدالة f(X) معرفة ومتصلة في الفترة $[X_1 - X_2]$ وكان

$$X_2 \rangle X_1, f(X_2) \rangle f(X_1)$$

تكون الدالة تزايدية ويكون ميل المماس للدالة موجبا أي

ان: $f'(X) \rangle 0, X_2 \geq X \geq X_1$

ويوضح ذلك شكل (3)



شكل (3)

ثانيا: الدوال المتناقصة:-

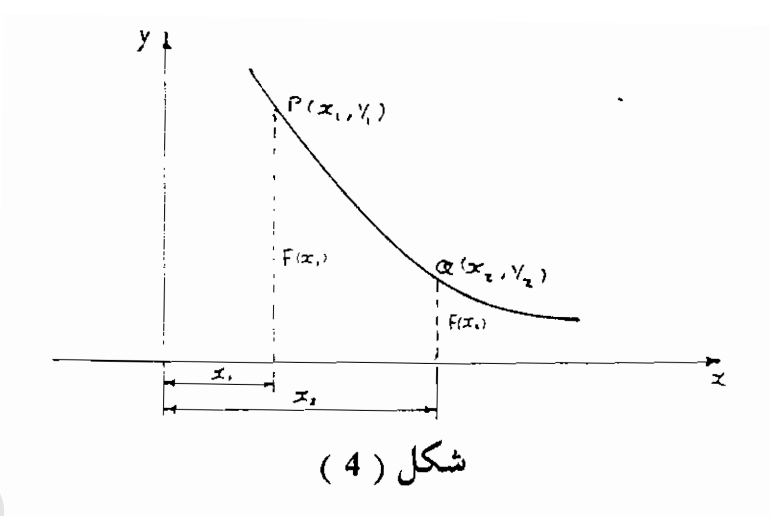
إذا كانت الدالة f(X) معرفة ومتصلة في الفترة $[X_1 - X_2]$ وكان:

$$X_2 \rangle X_1, f(X_2) \langle f(X_1)$$

تكون الدالة تناقصية ويكون ميل المماس للدالة سالبا أي أن:

$$f'(X) \langle 0, X_2 \geq X \geq X_1$$

ويوضح ذلك شكل (4)



شكل (4)

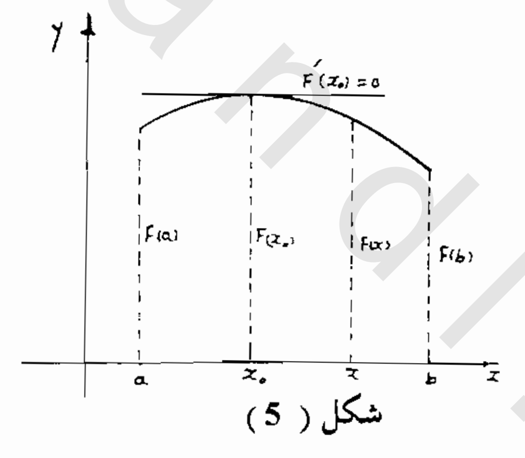
القيم العظمى والقيم الصغرى

اذا كانت f(X) دالة معرفة خلال الفترة $I(a,b)$ فانه:

1 - عندما $F(X_0)\rangle F(X), X \in I$:-

تكون للدالة نهاية عظمى نسبية عند $X = X_0$ ويكون عندها $F'(X) = 0$.

شكل (5)

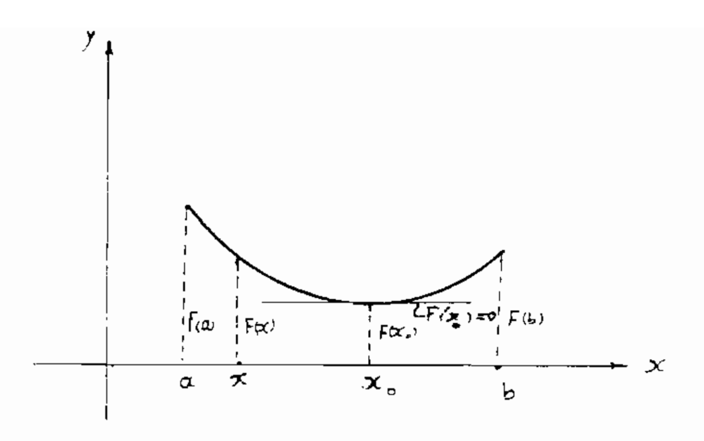


شكل (5)

2 - عندما $F(X_0)\langle F(X), X \in I$:-

تكون للدالة نهاية صغرى نسبية عند $X = X_0$ ويكون عندها $F'(X_0) = 0$

شكل (6)



شكل (6)

اختبار المشتقة الاولى:

1 -حل المعادلة $F'(X)=0$ للحصول على القيمة الحرجة

2-حدد مواضع القيم الحرجة على خط الاعداد مكونا بذلك عدد من الفترات

3-حدد اشارة $F'(X)$ في كل فترة

4-اجعل X تتزايد خلال الفترة مارة بالقيم الحرجة عند $X=X_0$ فيكون :-

(أ) لF(X) قيمة عظمى $F(X_0)$ عندما تتغير $F'(X)$ من + إلي -

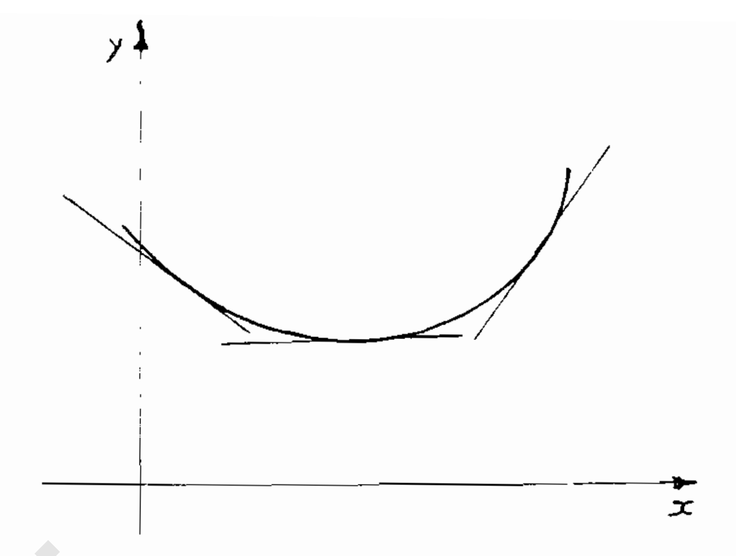
(ب) لF(X) قيمة صغرى $F(X_0)$ عندما تتغير $F'(X)$ من - إلي +

(جـ) لا يكون ل F(X) قيمة عظمى او صغرى عند $X=X_0$ اذا لم تغير $F'(X)$ إشارتها

(د) يمكن للدالة Y=F(X) ان يكون لها قيمة عظمى او صغرى $F(X_0)$ مع ان $F'(X_0)$ ليست موجودة.

اتجاه انحناء المنحنى:

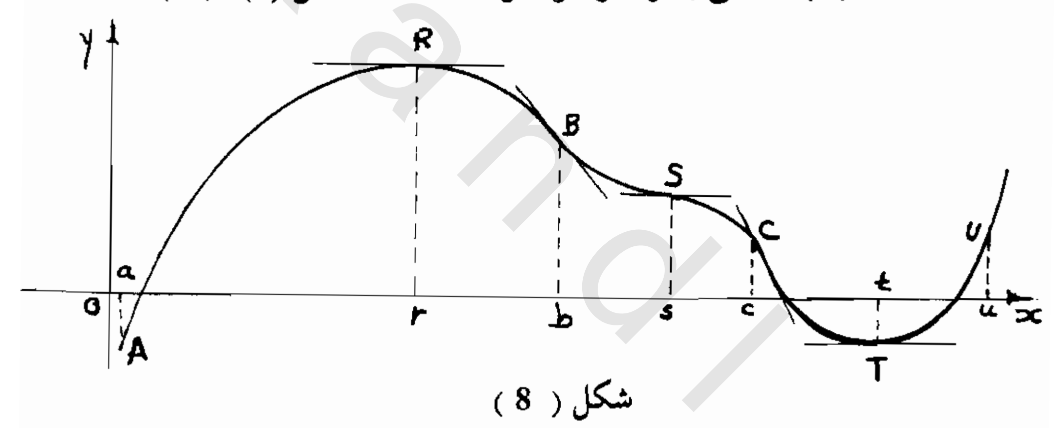
يكون المنحنى مقعرا عند كل نقطة من نقاطه اذا وقع قوس المنحنى فوق مماسه عند كل نقاطه شكل (7)



شكل (7)

وبزيادة X فإما:

1– ان تحافظ $F'(X)$ على إشارتها وتكون تزايدية كما بالشكل (8) $b<X<s$

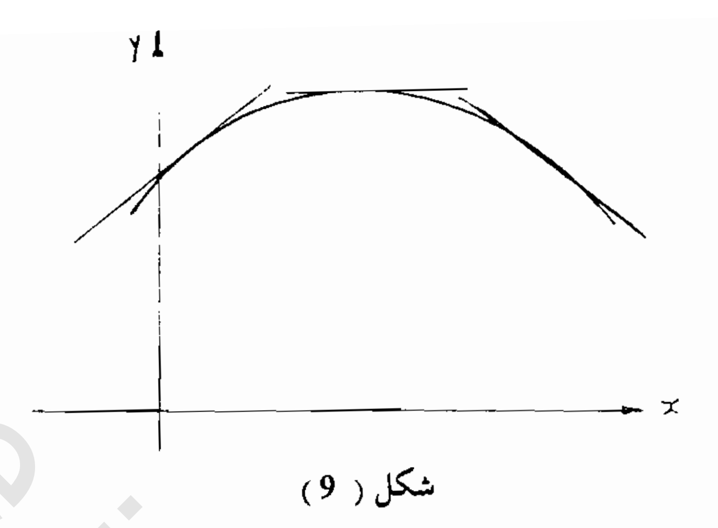


شكل (8)

2 – ان تغير $F'(X)$ اشارتها من السالبة إلي الموجبة كما بالشكل (8). $c<X<u$

<u>وفي كلا الحالتين يكون $F'(X)$ متزايدا ، $F''(X)>0$</u>

I– يكون المنحنى محدبا عند كل نقطة من نقاطه اذا وقع قوس النحنى تحت مماسه عند كل نقاطه. شكل (9)



شكل (9)

وبزيادة قيمة X فاما:

1 - أن تحافظ $F'(X)$ على اشارتها وتكون متناقصة في الفترة $s\langle X\langle c$ شكل (8)

2- ان تغير $F'(X)$ اشارتها من الموجبة إلي السالبة . $a\langle X\langle b$ شكل (8)

<u>وفي كلا الحالتين يكون الميل $F'(X)$ متناقص وتكون $F''\langle 0$</u>

نقطة الانقلاب (نقطة الانعطاف):

عندما يتغير شكل المنحني من التقعر إلى التحدب او من التحدب إلى التقعر فان نقاط التغير هذه تسمى نقط انقلاب كما بالشكل (8) . النقط C,S,B

ويكون للمنحنى نقط انقلاب عند $X = X_0$ اذا:

1 –كانت $F''(X_0) = 0$ او انها غير معرفة.

2- غيرت $F''(X)$ اشارتها بزيادة X عبر X_0

الاختبار الثاني للقيم العظمى و الصغرى. (اختبار المشتقة الثانية:) : –

1 – حل المعادلة $F'(X) = 0$ لايجاد القيم الحرجة

2 - عند القيم الحرجة $X = X_0$ يكون:

لـــ F(X) قيمة عظمى تساوي $F(X_0)$ اذا كانت $F''(X_0)\langle 0$

لـــ F(X) قيمة صغرى تساوي $F(X_0)$ اذا كانت $F''(X_0)\rangle 0$

ويفشل الاختبار اذا كانت $F''(X_0)=0$ او تكون غير محددة وفي هذه الحالة يجب استخدام طريقة المشتقة الاولى.

الخطوات المتبعة في رسم المنحنيات:

1 -يتم ايجاد المشتقة الاولى $F'(X)$ وذلك لتحديد النقاط الحرجة للدالة وكذلك فترات التزايد والتناقص.

2- يتم ايجاد المشتقة الثانية $F''(X)$ وذلك لتحديد النهايات العظمى والنهايات الصغرى النسبية ونقط الانقلاب.

3 - يتم ايجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحاور الرئيسية (وذلك بوضع X=0 لايجاد التقاطع مع المحور Y ، Y = 0 لايجاد التقاطع مع المحور x) وذلك بقدر المستطاع.

4- نختار قيما أخري للمتغير x ونعين قيمة Y المناظرة.

5 - نرتب كل هذه النقاط في جدول ونرسم المنحنى المطلوب.

امثلة محلولة

مثال 1:

اوجد الفترات المتزايدة والمتناقصة والنقاط الحرجة للدالة:

$$f(X) = X^3 - 3X + 3$$

الحل:

$$f'(X) = 3X^2 - 3$$

لإيجاد النقاط الحرجة :

$$\therefore \quad f'(X) = 0$$

$$\therefore 3X^2 - 3 = 0$$

$$3(X^2 - 1) = 0$$

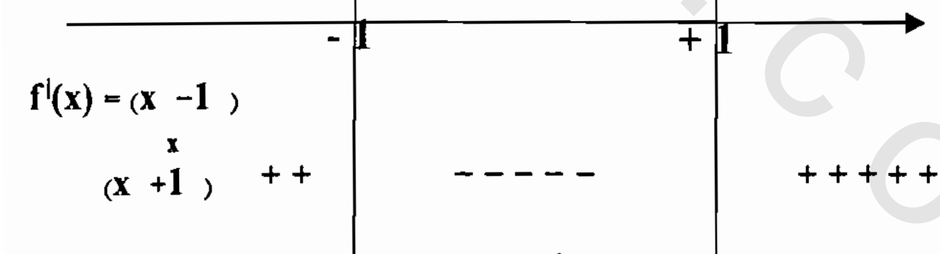
$$(X-1)(X+1) = 0$$

$$\therefore X = 1, X = -1$$

يتم تقسيم خط الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات:

(- ∞ , 1 -) , (1 - , 1) , (1 , ∞)

ثم نوجد اشارة $f'(X)$ في الفترات الثلاث وفي كل فترة تكون إشارة $f'(X)$ هي حاصل ضرب إشارتي القوسين $(X+1),(X-1)$ كما في الشكل (10).



شكل (10)

نلاحظ من الشكل الأتي:

الفترة الاولى	$-1\rangle X\rangle -\infty$	تكون الدالة تزايدية لان $f'(X)\rangle 0$
الفترة الثانية	$1\rangle X\rangle -1$	تكون الدالة تناقصية لان $f'(X)\langle 0$
الفترة الثالثة	$\infty\rangle X\rangle 1$	تكون الدالة تزايدية لان $f'(X)\rangle 0$

احداثيات النقطة الحرجة :

$$f(1)=(1)^3-3(1)+3=1$$

النقطة الحرجة الأولى هي: A(1,1)

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+3=5$$

النقطة الحرجة الثانية هي: B(-1,5)

مثال 2 :

اختبر الدالة التالية من حيث القيم الصغرى والعظمى النسبية.

$$f(X)=\frac{1}{3}X^3-2X^2+3X+1$$

الحل:

$$f'(X)=X^2-4X+3$$

وعند القيم الحرجة (العظمى والصغرى) تكون $f'(X)=0$

$$\therefore X^2-4X+3=0$$
$$(X-1)(X-3)=0$$
$$X=1 \quad , \quad X=3$$

وباستعمال المشتقة الاولى:

أولا: عند X=1 يتم اخذ قيم $X\rangle 1, X\langle 1$:

$$1-X\langle 1\rightarrow f'(X)=(-)(-)=+$$

$$2-X\rangle 1\rightarrow f'(X)=(+)(-)=-$$

أي أن $f'(X)$ غيرت اشارتها من + إلى -

وهذا يعني ان الدالة لها قيمة عظمى نسبية عند X=1 وقيمتها:

$$f(1)=\frac{1}{3}-2+3+1=2\frac{1}{3}$$

∴ احداثي القيمة العظمى النسبية هي:

$$(1,2\ \frac{1}{3})$$

ثانيا: عند X=3يتم اخذ قيم : $X\langle 3 \quad , \quad X\rangle 3$

$$1-\quad X\langle 3 \rightarrow f'(X)=(+)(-)=-$$

$$2-\quad X\rangle 3 \rightarrow f'(X)=(+)(+)=+$$

أي ان $f'(X)$ غيرت اشارتها من – إلى +

وعلى ذلك يكون للدالة قيمة صغرى نسبية عند X=3 وقيمتها:

$$F(3)=\frac{1}{3}(27)-2(9)+3(3)=1$$

∴ احداثي القيمة الصغرى النسبية هي: $(3,1)$

مثال 3 :

أوجد الفترات التي يكون فيها المنحنى للدالة:

$$f(X)=X^3-2X^2+X+1$$

له تقعر إلى أعلى والفترات التي يكون فيها له تقعر إلى اسفل

الحل:

$$f'(X)=3X^2-4X+1$$

نستخدم المشتقة الثانية لإيجاد نقط الانقلاب وإيجاد المطلوب.

$$f''(X)=6X-4$$

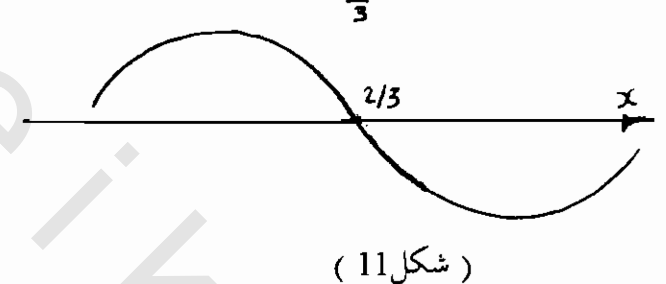
عند نقط الانقلاب: $f''(X)=0$

$\because 6X - 4 = 0$

$\therefore X = \frac{2}{3}$

نوجد إشارة $f''(X)$ عند $X\langle\frac{2}{3}, X\rangle\frac{2}{3}$ للكشف عن التقعر إلى أعلى او التقعر إلى اسفل(التحدب).

$F''(x)$ — — — — — — — — — — $\frac{2}{3}$ + + + + + + + + +



(شكل11)

$X\langle\frac{2}{3} \rightarrow f''(X) = -$

$X\rangle\frac{2}{3} \rightarrow f''(X) = +$

ويتضح من الشكل ان :فترات التحدب هي: $I_1(-\infty, \frac{2}{3})$

فترات التقعر هي : $I_2(\frac{2}{3}, \infty)$

حيث تسمى النقطة التي يغير عندها المنحني تقعره من اسفل إلى اعلى او العكس بنقطة الانقلاب.

مثال 4:

أوجد نقطة الانقلاب لمنحني الدالة:

$f(X) = X^3 - 3X^2 + 5X + 1$

الحل:

$f'(X) = 3X^2 - 6X + 5$
$f''(X) = 6X - 6$

عند نقطة الانقلاب يكون $f''(X) = 0$

$\therefore 6X - 6 = 0$
$X = 1$
$X < 1 \quad \therefore f''(X)$ سالبة
$X > 1 \quad \therefore f''(X)$ موجبة

$\therefore$ تكون نقطة الانقلاب عند X=1 وقيمتها f(1) :

$f(1) = 1 - 3 + 5 + 1 = 4$

أي ان احداثي نقطة النقلاب هو (1,4)

مثال 5 :

باستخدام المشتقة الثانية اوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة:

$f(X) = X^3 - 6X^2 + 1$

الحل:

$f'(X) = 3X^2 - 12X$

عند القيم الحرجة تكون $f'(X) = 0$

$\therefore 3X^2 - 12X = 0$
$3X(X - 4) = 0$

$\therefore$ القيم الحرجة تكون عند X=0 , X=4

لاختيار القيم العظمى والصغرى يتم التعويض بالقيم الحرجة في $f''(X)$

$f''(X) = 6X - 12$
$f''(0) =$ كمية سالبة

وحيث ان $f''(X)$ كمية سالبة فيوجد نهاية عظمى قيمتها f(0)

$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$

احداثي النهاية العظمى هو :A(0,1)

$f''(X) =$ كميةموجبة

وحيث $f''(X)$ كمية موجبة فيوجد نهاية صغرى قيمتها f(4)

$\therefore f(4) = 64 - 96 + 1 = -31$

احداثي النهاية الصغرى هو :B(4,-31)

مثال 6:

اختبر القيم العظمى والصغرى للدالة : $f(X) = (X-1)^3$

الحل:

$f'(X) = 3(X-1)^2$

عند القيم الحرجة $f'(X) = 0$

$(X-1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad X = 1$

$f''(X) = 6(X-1)$

وبالتعويض بالقيم الحرجة في $f''(X)$

$\therefore f''(X) = 6(1-1) = 0$

وعلى ذلك لاتعطي الدالة نهاية عظمى او صغرى عند استخدام المشتقة الثانية.

فيجب استخدام المشتقة الأولى :

$X < 1 \quad \rightarrow \quad f'(X) > 0$

$X > 1 \quad \rightarrow \quad f'(X) > 0$

وبالتالي فان المشتقة الاولى $f'(X)$ لاتغير اشارتها عند $X > 1, X < 1$

∴ لا توجد نهاية عظمى او صغرى للدالة المذكورة.

مثال 7:

أوجد القيم العظمى و الصغرى النسبية للدالة :

$Y = f(X) = X + \frac{1}{X}$

مع رسم الدالة.

الحل:

$$\frac{dY}{dX}=1-\frac{1}{X^2}$$

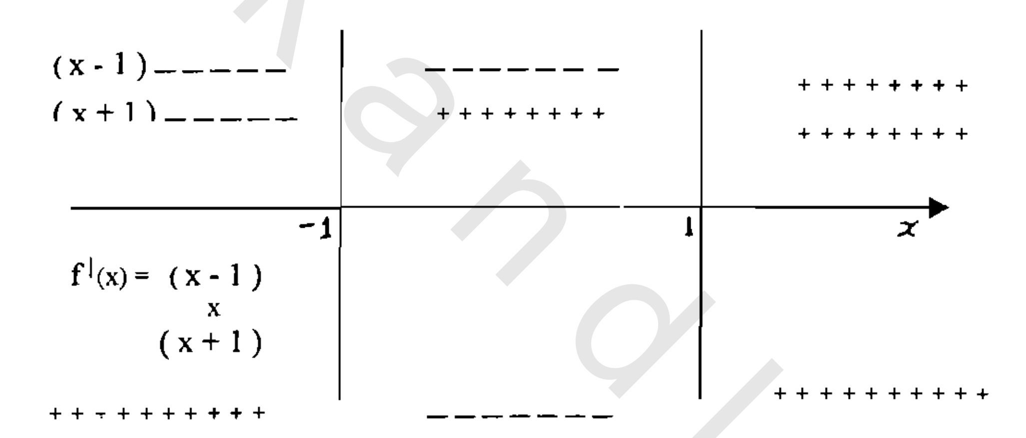
$$=\frac{X^2-1}{X^2}=\frac{(X-1)(X+1)}{X^2}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=2X^{-3}=\frac{2}{X^3}$$

للقيم الحرجة $\frac{dY}{dX}=0$

$\therefore X=1, X=-1$

نوقع القيم الحرجة على خط الاعداد. ثم نحدد اشارة الفترا ت (شكل 12)



شكل (12)

ولتسهيل الرسم:

يمكن اعتبار الدالة Y تتكون من منحنيين :

$Y=Y_1+Y_2$

حيث : $Y_1 = \frac{1}{X}$

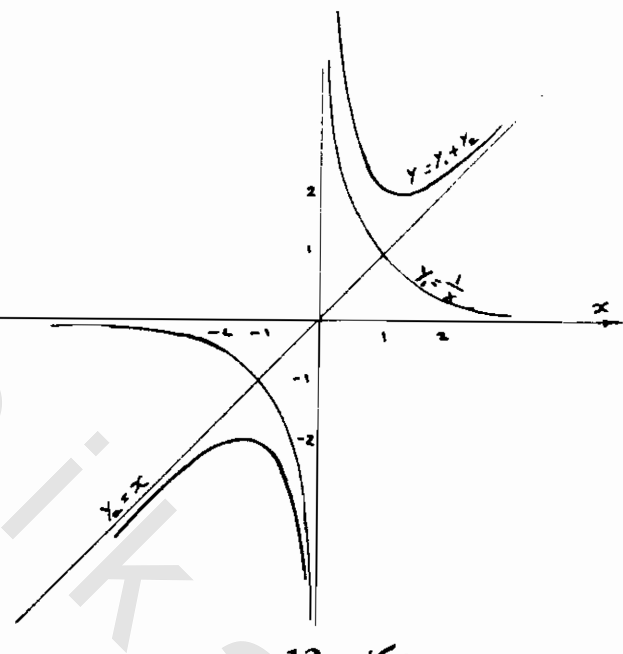
$Y_2 = X$

وبالتالي يمكن عمل الجدول الآتي (جدول 1)

ومن الجدول يتم رسم الدالة بيانيا (شكل 13)

x	Y_1	Y_2	Y	Y'	Y''	ملاحظات
-4	- 1/4	- 4	17 / 4 −	+	−	التقعر إلي أسفل
- 2	- 1/2	- 2	- 5 / 2	+	−	التقعر إلي أسفل
- 1	- 1	- 1	- 2	0	-2	قيمة عظمى
- 1/2	- 2	- 1/2	- 5 /2	−	−	التقعر إلي أسفل
- 1/4	- 4	- 1/4	- 17/4	−	−	التقعر إلي أسفل
1/4	4	1 /4	17 /4	−	+	التقعر إلي أعلى
1 /2	2	1 /2	5 /2	−	+	التقعر إلي أعلى
1	1	1	2	0	2	قيمة صغرى
2	1/2	2	5 / 2	+	+	التقعر إلي أعلى
4	1/4	4	17 / 4	+	+	التقعر إلي أعلى

جدول (1)



شكل (13)

تمـــــارين 4

1- إذا كانت : $f(X) = 3X^2 - X^3$

فاوجد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترات التي تكون فيها الدالة متناقصة. ثم أوجد القيم العظمى و الصغرى.

2 - ارسم منحنى الدالة : $f(X) = \frac{1}{2}X^4 - 3X^2 + 4X + 10$

3 -أوجد النقط الحرجة ونقط الانقلاب للدالة f(X) :

$$f(X) = 3X^2 - 6X - 9$$

4- أوجد النقط الحرجة ونقط الانقلاب للدالة f(X) :

$$f(X) = X^3 - 12X$$

5 - أوجد القيم العظمى والصغرى لمنحنى الدالة f(X) :

$$f(X) = 8X/(4 + X^2)$$

6 -ارسم المنحنى f(X) حيث:

$$f(X) = \frac{1}{6}(X^3 - 6X^2 + 9X + 6)$$

و اوجد القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب.

7 - اوجد القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب للدالة f(X) :

$$f(X) = X^3 + X^2 - 5X$$

8 -اوجد النقاط الحرجة وفترات التزايد و التناقص والقيم العظمى والقيم الصغرى ونقط الانقلاب للدالة F(X) :

$$f(X) = 4X^3 - 3X^2 + 2$$

9 -اوجد القيم العظمى والصغرى وكذلك نقط الانقلاب للدالة f(X) :

$$(a) \quad f(X) = X^2/(X + 1)$$

$$(b) \quad f(X) = \frac{3}{8}(X - 9)(X - 1)^{5/3}$$

تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

مثال 1:

اناء في وضع راسي يحتوي على سائل حجمه V يعطى بدلالة h بعد سطح السائل عن المستوي الافقي المار بالحافة العليا بالمعادلة: $V = 5h^2 - 5h + 3$. فإذا كان بقاعدة الاناء (شكل 14) ثقب يتسرب منه السائل بمعدل 10 وحدات مكعبة/ثانية وكان معدل زيادة h يساوي 3 وحدات مكعبة/ثانية. اوجد h في هذه اللحظة.

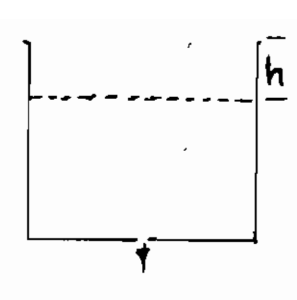
الحل:

$$V = 5h^2 - 5h + 3$$

$$\frac{dV}{dh} = 10h - 5 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dt}{dh}$$

$$= (-10).(\frac{1}{3}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$



بمساواة المعادلة (1) بالمعادلة (2)

$$\therefore 30h - 15 = -10$$

$$30h = 5$$

$$h = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

مثال 2:

ab سلم منتظم طوله 50 قدم يرتكز بطرفه a على حائط راسي وبطرفه b على ارض افقية. فإذا تحرك الطرف b مبتعدا عن الحائط بسرعة مقدارها 3 قدم/دقيقة فاوجد: (شكل 15)

1- سرعة a عندما يبتعد الطرف b عن الحائط بمقدار 14 قدم

2- بعد b عن الحائط عندما تتساوى مقدار سرعة كل من a,b

3- بعد b عن الحائط عندما يتحرك a إلي اسفل بسرعة 4 قدم /دقيقة

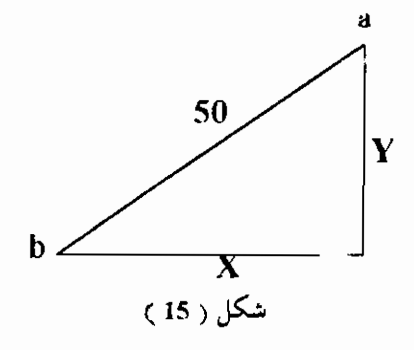
الحل:

$$l^2 = X^2 + Y^2$$

وباجراء التفاضل للطرفين بالنسبة للطرفين:

$$\therefore 2l \cdot \frac{dl}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt} \ldots\ldots(1)$$

$$(0) = 2(14)\frac{dX}{dt} + 2\sqrt{50^2 - 14^2}\,\frac{dY}{dt}$$



شكل (15)

$$\frac{dX}{dt} = 3$$

$$\therefore \frac{dY}{dt} = \frac{14(3)}{48} = \frac{14}{16}$$

2- $\frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt}$

∴ بالتعويض في المعادلة رقم (1)

$$0 = 2(X) + 2\sqrt{50^2 - X^2}$$

$$\therefore X^2 = 50^2 - X^2$$

$$2X^2 = 50^2$$

$$\therefore \quad X = \frac{50}{\sqrt{2}}$$

iii- – بالتعويض في (1) عن $\frac{dX}{dt} = 3, \frac{dY}{dt} = 4$

$$\therefore 0 = X(3) + \sqrt{50^2 - X^2}(-4)$$

$$\frac{9X^2}{16} = 50^2 - X^2$$

$$25X^2 = 50^2(16)$$

$$X^2 = 100(16)$$

$$X = 40$$

مثال 3:

كرة حديدية قطرها 8 سم مغطاة بطبقة من الجليد. فإذا كان الجليد ينصهر بمعدل $10cm^3/s$ فاوجد:

1 – سرعة تناقص سمك الجليد عندما يكون هذا السمك 2سم.

2 – سرعة تناقص مساحة سطح الجليد الخارجي عند نفس اللحظة.

الحل:

بفرض ان نصف قطر الكرة هو r ، سمك الجليد هو x فان الحجم الكلي V هو:

$$V = \frac{4}{3}\pi(r+x)^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3rx^2 + 3r^2x + x^3)$$

فإذا كان حجم الكرة V_b

$$V_b = \frac{4}{3}\pi r^3$$

فان حجم الجليد $V_i = (V - V_b)$:

$$V_i = \frac{4}{3}\pi(3rx^2 + 3r^2x + x^3)$$

معدل انصهار الجليد

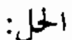
$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3(2)(4)2\frac{dx}{dt}) + 3(16)\frac{dx}{dt} + 3(2)^2\frac{dx}{dt})$$
$$10 = \frac{4}{3}\pi(48\frac{dx}{dt} + 48\frac{dx}{dt} + 12\frac{dx}{dt})$$
$$\frac{30}{4\pi} = 108\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{30}{132\pi}$$

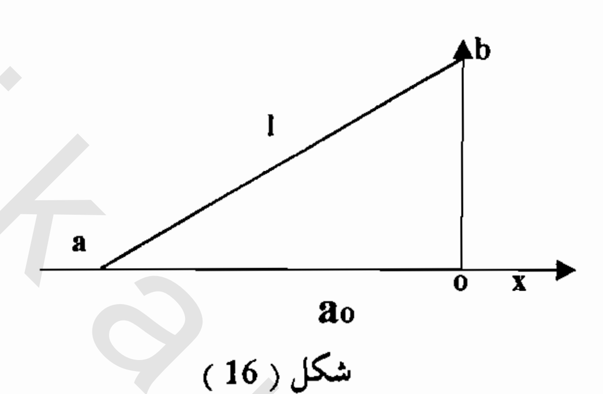
2 – بفرض ان المساحة السطحية هي A :

$$\therefore \quad A = 4\pi(r+x)^2$$
$$\therefore \frac{dA}{dt} = 4\pi(2)(r+x)\frac{dx}{dt}$$
$$= 4\pi(2)(6)(\frac{30}{132\pi}) = \frac{10}{3} \ cm^2/s$$

مثال 4:

في الساعة الثامنة صباحا شاهد شخص واقف في جزيرة سفينة تتحرك غربا بسرعة مقدارها 15 ميلا بحريا/ساعة وبعد ساعتين شاهد سفينة اخرى تتحرك بسرعة 60 ميل بحري/ساعة فاوجد سرعة تباعدهما عند الساعة الحادية عشر صباحا. شكل 16.

الحل: 



شكل (16)

بفرض ان o هي نقطة الاصل وان a_0 موضع السفينة الاولى بعد ساعتين

$\therefore 0a_0 = 2(15) = 30$

نفرض ان a موضع السفينة بعد t من الساعات من مرور السفينة الثانية بالنقطة o، و ان b موضع السفينة الثانية في هذه اللحظة:

$$0a = 0a_0 + a_0a$$
$$= 30 + 15t$$
$$0b = 60t$$

فإذا كان البعد بين السفينتين عند اللحظة t = $l = ab$

$$\therefore \overline{ab}^2 = \overline{0a}^2 + \overline{0b}^2$$
$$\therefore \quad l^2 = (30+15t)^2 + (60t)^2$$
$$= 3825t^2 + 900t + 900 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وبإجراء التفاضل:

$$\therefore 2l\frac{dl}{dt} = 7650t + 900$$
$$\frac{dl}{dt} = \frac{7650t + 900}{2l}$$

وبالتعويض عن t=1 في المعادلة رقم (1)

$$\therefore \ l^2 = 3825 + 900 + 900 = 5625$$
$$\therefore \quad l = 75$$
$$\therefore \frac{dl}{dt} = \frac{7650 + 900}{2(75)} = \frac{8550}{150}$$
=57 mil/h

تمــــاريـــــن (5)

1 - اوجد عددان مجموعها 20 وحاصل ضربهما اكبر مايمكن.

2 – نريد ان نصنع علبة مربعة القاعدة ومفتوحة من اعلى تتسع $0.032m^3$
اوجد ابعاد العلبة التي تتطلب اقل كمية من المادة اهمل سمك المادة وما يتلف اثناء التصنيع.

3 – قمع على هيئة مخروط دائري قائم ارتفاعه 9سم ونصف قطر قاعدته 6سم بحيث يكون محوريهما راسيين وراس المخروط لاسفل يصب في القمع سائل بمعدل $25cm^3/s$ اوجد معدل ارتفاع سطح السائل إلى نصف ارتفاع القمع ثم اوجد المعدل الذي يزداد به نصف قطر السائل في القمع تلك اللحظة.

4 – صفيحة من القصدير مربعة الشكل طول ضلعها a تستعمل هذه الصفيحة لصنع علبة مفتوحة من .على وذلك بان يقطع منها مربع صغير من كل ركن من اركانها الاربعة. ثم تثنى الاطراف كم ي بغي ان يكون المربع المقطوع من كل ركن كي نحصل على اكبر حجم ممكن للعلبة.

5 – المطوب تصنيع علبة على شكل اسطوانة دائرية قائمة تتسع $100cm^3$ ما هي ابعاد العلبة كي تستهلك اقل كمية من المادة

6 – سلك طوله l نرغب ان نقطعه إلي قطعتين نثني الاولى على شكل دائرة ونثني الثانية على شكل مربع. كيف ينبغي ان نقطع السلك كي يكون مجموع المساحتين اللتين تحددهما القطعتان اكبر ما يمكن.

7 – نرغب ان نبني مخزنا مفتوحاً من اعلى، مربع القاعدة وجدرانه رأسية بكمية معينة من مواد البناء بين كم ينبغي ان تكون ابعاد هذا المخز ن كي نحصل على اكبر حجم ممكن مع اهمال سمك المادة وما يتلف اثناء البنا ء.

اشتقاق الدوال المثلثية

عرفنا فيما سبق النسب المثلثية والتطبيقات المرتبطة بها والان سوف ندرس قواعد الاشتقاق لها.

قواعد الاشتقاق:

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فان:

$$(1)\quad \frac{d}{dX}\sin u = \cos u \frac{du}{dX}$$

$$(2)\quad \frac{d}{dX}\cos u = -\sin u \frac{du}{dX}$$

$$(3)\quad \frac{d}{dX}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dX}$$

$$(4)\quad \frac{d}{dX}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dX}$$

$$(5)\quad \frac{d}{dX}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dX}$$

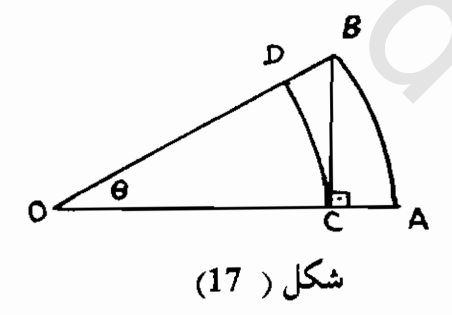
$$(6)\quad \frac{d}{dX}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dX}$$

مثال 1:

اثبت ان : $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

الحل :

نعتبر القطاع الدائري AOB ذو زاوية مركزية θ صغيرة وموجبة ونصف قطر دائرة القطاع OA=1 (شكل 17).



شكل (17)

من الشكل يتضح ان :

مساحة القطاع OAB اكبر من مساحة $OAB\Delta$ القائم في C اكبر من مساحة القطاع الدائري OCD. وحيث ان زاوية θ صغيرة يكون بمقارنة المساحات:

مساحة $AOB \geq COB \geq OCD$

$$\frac{1}{2}\theta \geq \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \geq \frac{1}{2}\theta\cos\theta^2$$

وبالقسمة على $\frac{1}{2}\theta\cos\theta$ واخذ النهاية عندما $\theta \to 0$:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos B} \geq \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \geq \lim_{\theta\to 0}\cos\theta$$

$$1 \geq \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \geq 1$$

وبالتالي يجب ان تكون:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(يمكن للدارس ان يصل إلي هذه النتيجة بطريقة الاقتراب من جهتي $\theta = 0$ أي من جهة يمين $\theta = 0$ ومن جهة يسار $\theta = 0$)

مثال 2 :

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـــ X اثبت ان:

$$\frac{d}{dX}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dX}$$

الحل : بفرض أن : -

$$Y = \sin u$$

$$Y + \Delta Y = \sin(u + \Delta u)$$

$$\therefore \quad \Delta Y = \sin(u + \Delta u) - \sin u$$

$$= 2\cos(u + \frac{1}{2}\Delta u)\sin\frac{1}{2}\Delta u$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \cos(u + \frac{1}{2}\Delta u)\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$$

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$= \cos u$$

وباستخدام قاعدة السلسلة :

$$\frac{dY}{dX}=\frac{dY}{du}\cdot\frac{du}{dX}$$

$$\frac{d}{dX}\sin u=\cos u\frac{du}{dX}$$

مثال 3:

اوجد المشتقة الاولى للدالة:

$$Y=3\sin X+4\cos X$$

الحل:

$$Y'=3\cos X+4(-\sin X)$$
$$=3\cos X-4\sin X$$

أمثلة محلوله

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

1- $Y=4\cos\frac{X}{3}$

2- $Y=\tan^2 3X$

3- $Y=\tan^2(\cos X)$

4- $Y=(\csc X+\cot X)^2$

5- $Y=\sqrt{\cot x}$

6- $Y=\frac{\cos 4x}{1-\sin 4x}$

7- $Y=\sin(X+Y)$

الإجابـــة

1 - $Y = 4\cos\frac{X}{3}$

$$Y' = 4(-\sin\frac{X}{3})\cdot\frac{1}{3} = -\frac{4}{3}\sin\frac{X}{3}$$

2 - $Y = \tan^2(3X)$

$$= (\tan 3X)^2$$

$$Y' = 2(\tan 3X).\sec^2 3x.3$$

$$= 6\tan 3X.\sec^2 3X$$

3 - $Y = \tan^2(\cos X)$

$$= (\tan(\cos X))^2$$

$$Y' = 2(\tan(\cos X))(\sec^2(\cos X)).(-\sin X)$$

$$= -2\sin X\tan(\cos X).\sec^2(\cos X)$$

4 - $Y = (\csc X + \cot X)^2$

$$Y' = -2(\csc X + \cot X)(\csc X\cot X + \csc^2 X)$$

5- $Y=\sqrt{\cot X}$

$$Y'=\frac{-\csc^2 X}{2\sqrt{\cot X}}$$

6- $Y=\dfrac{\cos 4X}{1-\sin 4X}$

$$Y'=\frac{(1-\sin 4X)(-4\sin 4X)-\cos 4X(-4\cos 4X)}{(1-\sin 4X)^2}$$

$$=\frac{4(-\sin 4X+\sin^2 4X)+\cos^2 4X)}{(1-\sin 4X)^2}$$

$$=\frac{4(1-\sin 4X)}{(1-\sin 4X)^2}$$

$$=\frac{4}{1-\sin 4X}$$

7- $Y=\sin(X+Y)$

$$Y'=\cos(X+Y)(1+Y')$$

$$Y'(1-\cos(X+Y))=\cos(X+Y)$$

$$\therefore \quad Y'=\frac{\cos(X+Y)}{1-\cos(X+Y)}$$

تمـــــاريــــن 6

I – اوجد المشتقة الاولى للدوال الاتية : -

1 – $Y = \sin^2 X$

2 – $Y = 3\sin 2X$

3 – $Y = \cos\frac{3}{X}$

4 – $Y = 5\cos\frac{1}{2}X$

5 – $Y = \frac{1}{3}\sec^3 X$

6 – $Y = \tan 3X$

7 – $Y = \tan^2(3X - 2)$

8 – $Y = \cot 8X$

9 – $Y = X - \tan X$

10 – $Y = \sec\frac{1}{3X}$

11 – $Y = \cos(1 - X^2)$

12 – $Y = \cos(1 - X)^2$

13 – $Y = \sec^2 X - \tan^2 X$

14 – $Y = \cot^3(3X - 1)$

15 – $Y = \csc(X^4 - 4)$

16 – $Y = \tan\sqrt[3]{5 - 6X}$

17 – $Y = \sin\sqrt{X} + \sqrt{\sin X}$

18 – $Y = (\tan 2X - \sec 2X)^3$

19 – $Y = X^2 \sec^3 4X$

20 – $Y = \tan^3 X.(X)$

21 – $Y = \tan^2 X \sec^3 X$

22 – $Y = 4X^3 - X^2\cot^3(\frac{1}{X})$

23 – $Y = \frac{\csc 3X}{X^3 + 1}$

24 – $Y = \frac{\sec 2X}{\tan 2X + 1}$

25 – $\sin Y + \cos X = 1$

26 – $f(X) = \sin X \cos 3X$

27 – $\sin X = \cos 2X$

28 – $X\cos Y = \sin(X + Y)$

II – اوجد المشتقة الثانية للدوال التالية :–

1 – $Y = \sec^2 3X$

2 – $Y = \sin X - X\cos X$

3 – $Y = \sqrt{\tan X}$

4 – $Y = \cot^3 5X$

5 – $Y = \dfrac{\cos X - 1}{\cos X + 1}$

الدوال المثلثية العكسية

اذا كانت X=sinY فان الدالة العكسية تكون: $Y = \sin^{-1} X$ (شكل 18).

فيكون المجال (الحيز): $-1 \le X \le 1$

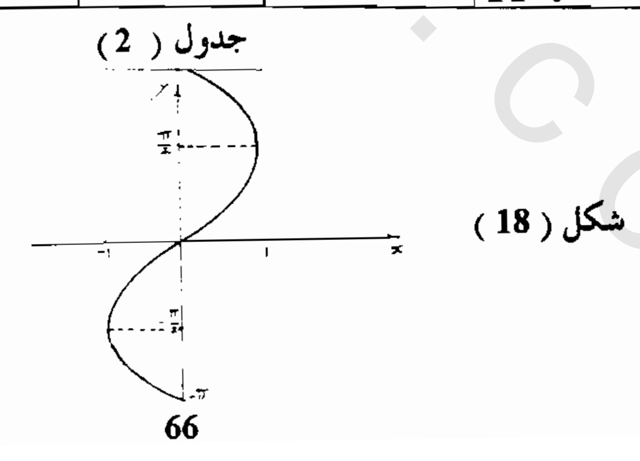
والمدى: مجموعة الأعداد الحقيقية .

ويبين الجدول التالي رقم (2) بعض الدوال المثلثية العكسية.

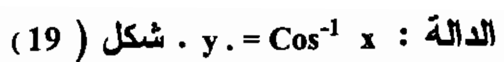
F(Y)=X

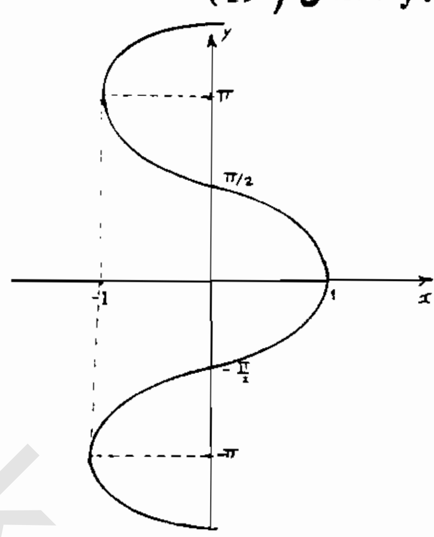
	Sin^{-1} x	Cos^{-1} x	Tan^{-1} x	Cot^{-1} x
التعريف	X = sin y	X= cos y	X= tan y	X=cot y
المجال	-1< x <1	-1< x <1	-∞<x<∞	-∞<x<∞
المدى	- ∏/2<y< ∏/2	∏ ≥ y ≥ 0	- ∏/2<y< ∏/2	∏>y>0

جدول (2)



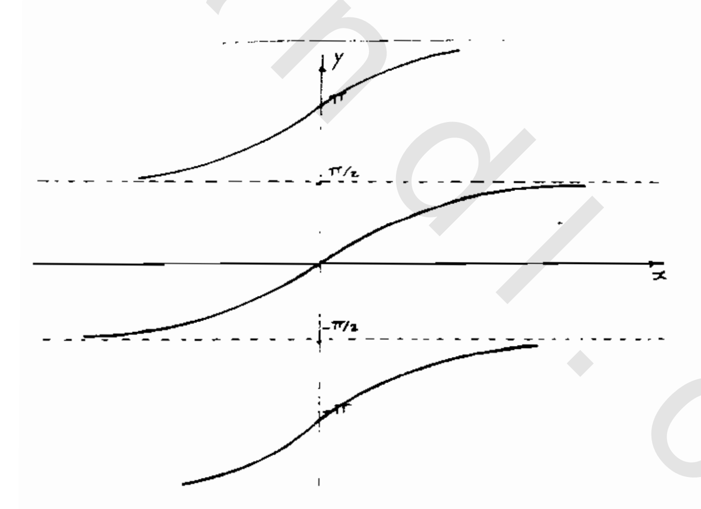
شكل (18)


الدالة : $y = \cos^{-1} x$. شكل (19)



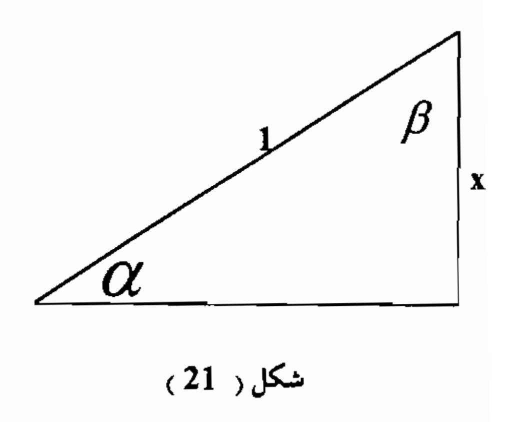
شكل (19)

الدالة : $y = \tanh^{-1} x$. شكل (20)



شكل (20)

العلاقة بين β,α (شكل 21):



شكل (21)

$$\sin\alpha = X = \cos\beta$$
$$\therefore\ \alpha = \sin^{-1} X$$
$$B = \cos^{-1} X$$
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$
$$B = \frac{\pi}{2} - \alpha$$
$$\cos^{-1} X = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} X$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات ان:

$$\cot^{-1} X = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} X$$
$$\sec^{-1} X = \cos^{-1}(\frac{1}{X})$$
$$\csc^{-1} X = \sin^{-1}(\frac{1}{X})$$

والمدى الخاص بهم من الجدول السابق حيث:

$$0 \le \sec^{-1} X \le \pi \quad , \quad \pi \ge \cot^{-1} X \ge 0$$
$$-\frac{\pi}{2} \le \csc^{-1} X \le \frac{\pi}{2}$$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية:

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـــ x فان:

$$1-\quad \frac{d}{dX}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dX}$$

$$2-\quad \frac{d}{dX}\cos^{-1}u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dX}$$

$$3-\quad \frac{d}{dX}\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dX}$$

$$4-\quad \frac{d}{dX}\cot^{-1}u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dX}$$

$$5-\quad \frac{d}{dX}\sec^{-1}u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dX}$$

$$6-\quad \frac{d}{dX}\csc^{-1}u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dX}$$

طريقة استنتاج المشتقة :

بفرض ان: sinY=u

$$\therefore \cos Y \cdot \frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{\cos Y}\frac{du}{dX}$$

وحيث أن :

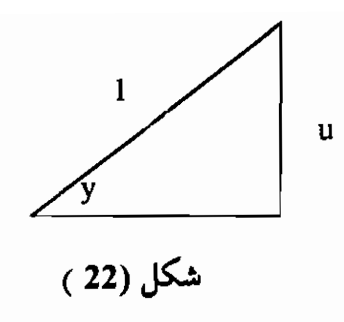
$$\sin^{-1}u = Y$$

$$\therefore \frac{d}{dX}\sin^{-1}u = \frac{dY}{dX}$$

$$= \frac{1}{\cos Y}\frac{du}{dX}$$

ومن هندسة الشكل يمكن ايجاد

قيمة cosY .(الشكل 22)



شكل (22)

وحيث ان: $-\frac{\pi}{2} \le Y \le \frac{\pi}{2}$

فتكون الزاوية Y في الربع الأول أو الرابع

$\therefore \cos Y$ غير سالبة

$$\therefore \frac{d}{dX}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dX}$$

لاثبات القاعدة 5 :

بفرض ان : $Y = \sec^{-1}u$

$$\therefore \sec Y = u$$

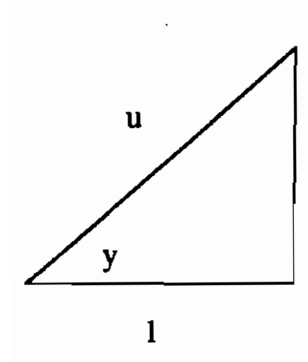
بتفاضل طرفي المعادلة

$$\therefore \sec Y \tan Y \frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}$$

$$\therefore \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{1}{\sec Y \tan Y}\frac{du}{dX}$$

ومن هندسة الشكل يمكن ايجاد قيمة $\tan Y$

شكل 23.



شكل (23)

$$\therefore \tan Y = \pm\sqrt{u^2 -}$$

وحيث ان : $\pi \geq Y \geq 0$

$$\therefore \tan Y = +\sqrt{u^2 - 1} \quad , \quad \frac{\pi}{2} \geq Y \geq 0$$

$$\tan Y = -\sqrt{u^2 - 1} \quad , \quad \pi \geq Y \geq \frac{\pi}{2}$$

وبصفة عامة يكون :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{u(\pm\sqrt{u^2 - 1})} \frac{du}{dX}$$

$$\frac{d}{dX} \sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$$

أمثلـــــة محلـــولـــه

اوجد المشتقة الاولى للدوال الاتية:

1- $Y = \sin^{-1} 3X - \cos^{-1} 3X$

2- $Y = \tan^{-1} X^2$

3- $Y = \tan^{-1}(\sin X)$

4- $Y = \dfrac{1}{\sin^{-1} X}$

5- $Y = (\sec^{-1} \sqrt{X})(\sqrt{X})$

6- $Y^2 \sin X + Y = \tan^{-1} X$

الإجـــابــة

1 – $Y = \sin^{-1} 3X - \cos^{-1} 3X$

$$Y' = \frac{3}{\sqrt{1-9X^2}} - \frac{-3}{\sqrt{1-9X^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{1-9X^2}}$$

2 – $Y = \tan^{-1} X^2$

$$Y' = \frac{2X}{1+X^4}$$

3 – $Y = \tan^{-1}(\sin X)$

$$Y' = \frac{1}{1+\sin^2 X}(\cos X)$$

4 – $Y = \dfrac{1}{\sin^{-1} X}$

$$Y' = -1(\sin^{-1} X)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

$$= -\frac{1}{(\sin^{-1} X)^2\sqrt{1-X^2}}$$

5 – $Y = (\sec^{-1}\sqrt{X})(\sqrt{X})$

$$Y' = \sec^{-1}\sqrt{X} \cdot \frac{1}{2\sqrt{X}} + \sqrt{X}\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{X}}}{\sqrt{X}\sqrt{X-1}}$$

$$= \frac{\sec^{-1}\sqrt{X}}{2\sqrt{X}} + \frac{1}{2\sqrt{X}\sqrt{X-1}}$$

6 – $Y^2 \sin X + Y = \tan^{-1} X$

$$2YY'\sin X + Y^2\cos X + Y' = \frac{1}{1+X^2}$$

$$Y'(2Y\sin X + 1) = \frac{1}{1+X^2} - Y^2\cos X$$

$$= \frac{1-(1+X^2)Y^2\cos X}{1+X^2}$$

$$Y' = \frac{1-(1+X^2)Y^2\cos X}{(2Y\sin X + 1)(1+X^2)}$$

تمــــاريــــن 7

1- اوجد قيمة المشتقة الاولى للدوال الاتية:

1- $Y=\sin^{-1}(8X+3)$

2- $Y=(\mathrm{cof}^{-1}(3X+1))^3$

3- $Y=X^2\csc^{-1}5X$

4- $Y=\tan^{-1}(\sin 2X)$

5- $Y=X^2+X\sin^{-1}X$

6- $Y=(1+\cos^{-1}3X)^3$

7- $Y=\sec^{-1}X^2$

8- $Y=\cos^{-1}5X$

9- $Y=\tan^{-1}(3X-5)$

10- $Y=\sec^{-1}\sqrt{X^2-1}$

11- $Y=\cot^{-1}\dfrac{1+X}{1-X}$

12- $Y=X\csc^{-1}\dfrac{1}{X}+\sqrt{1-X^2}$

13- $Y=(\dfrac{1}{X}-\sin^{-1}\dfrac{1}{X})^4$

14- $Y=\tan^{-1}\dfrac{X+1}{X-1}$

15- $Y=\tan^{-1}(\ln X^2)$

16- $Y=X\sin^{-1}(3X)$

17- $Y=\tan^{-1}e^{3X}$

I- احسب قيمة كل من:

18 – $\sin^{-1}\frac{1}{2}$

19 – $\cot^{-1}1$

20 – $\tan^{-1}(-1)$

21 – $\csc^{-1}1$

22 – $\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$

23 – $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

اشتقاق الدوال الآسية و اللوغاريتمية

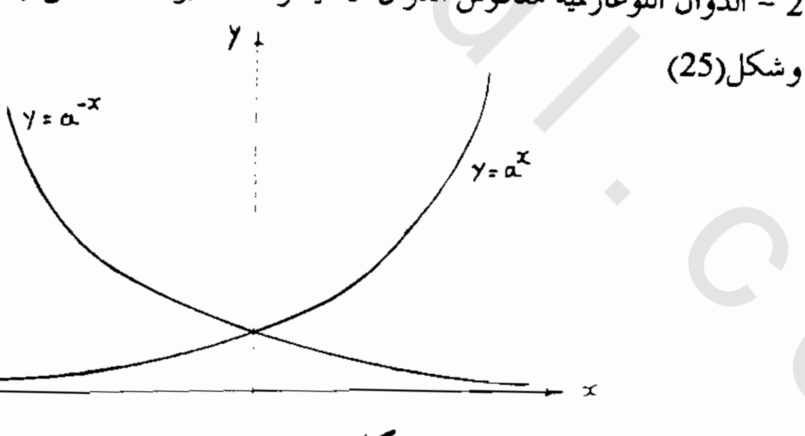
نعلم ان:

1 - اذا كان $a^Y = X, a \neq 1, a > 0$ فان :

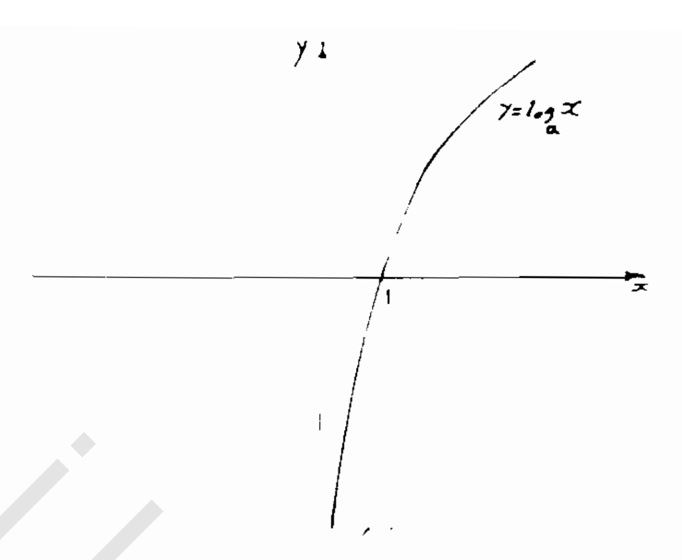
$Y = \log_a X$, $Y = \log_{10} X = \log X$

$, Y = \log_e X = \ln X$

2 – الدوال اللوغارتمية معكوس الدوال الآسية وهذا ما يوضحه شكل (24) وشكل(25)



شكل (24)



شكل (25)

قواعد الاشتقاق :

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسنة ل x فان:

$$I)\quad \frac{d}{dX}\log_a u = \frac{1}{u}\log_a e\frac{du}{dX}$$

$$II)\quad \frac{d}{dX}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dX}$$

$$III)\quad \frac{d}{dX}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dX}$$

$$IV)\quad \frac{d}{dX}e^u = e^u\frac{du}{dX}$$

امثلة محلولة

1 - اوجد المشتقة الاولى لكل مما يأتي:-

$(a)\quad Y = \log_a(3X^2 - 5)$

$(b)\quad Y = \ln(X+5)^2$

$(c)\quad Y = \ln(X^3+2)(X^2+3)$

$(d)\quad Y = \ln(X = \sqrt{1+X^2})$

الإجـــابـــة

$$(a)\quad \frac{dY}{dX} = \frac{1}{3X^2-5}\log_a e \frac{d}{dX}(3X^2-5)$$

$$= \frac{1}{3X^2-5}(\log_a e)(6X)$$

$$(b)\quad \frac{d}{dX}Y = \frac{2}{X+5}\frac{d}{dX}(X+5)$$

$$= \frac{2}{X+5}$$

$$(c)\quad Y = \ln(X^3+2)(X^2+3)$$

$$= \ln(X^3+2) + \ln(X^2+3)$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{X^3+2}\frac{d}{dX}(X^3+2) + \frac{1}{X^2+3}\frac{d}{dX}(X^2+3)$$

$$= \frac{3X^2}{X^3+2} + \frac{2X}{X^2+3}$$

$$(d)\quad \frac{dY}{dX} = \frac{1+\frac{1}{2}(1+X^2)^{-\frac{1}{2}}(2X)}{X+\sqrt{1+X^2}} \cdot \frac{X-\sqrt{1+X^2}}{X-\sqrt{1+X^2}}$$

$$= \frac{X-\sqrt{1+X^2}+X^2(1+X^2)^{-\frac{1}{2}}-X}{X^2-(1+X^2)}$$

$$= +\sqrt{1+X^2} - \frac{X^2}{\sqrt{1+X^2}}$$

2 – اثبت ان:–

$$(a) \quad \frac{d}{dX}a^{u} = a^{u}\ln a\frac{du}{dX}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dX}e^{u} = e^{u}\frac{du}{dX}$$

الإجـــابـــــة

بفرض ان $Y = a^{u}$ وباخذ لوغاريتم الطرفين

$$(a) \quad \ln Y = u\ln a$$

وبإجراء التفاضل للطرفين بالنسبة لـX

$$\therefore \frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = \ln a\frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = a^{u}\ln a\cdot\frac{du}{dX}$$

بفرض ان

$$(b) \quad Y = e^{u}$$

$$\ln Y = u$$

باجراء التفاضل للطرفين بالنسبة ل X :

$$\therefore \frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = Y\frac{du}{dX}$$

$$= e^{u}\frac{du}{dX}$$

3 -أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي : –

$(a) \quad Y = e^{-\frac{1}{2}X}$

$(b) \quad Y = e^{X^{3}}$

$(c) \quad Y = a^{nX}$

$(d) \quad Y = \ln X^{n}$

$(e) \quad Y = \ln\sqrt{X}$

$(f) \quad Y = X^{X}$

الإجـــــابـــــة

(a) $Y = e^{-\frac{1}{2}X}$

$$\frac{dY}{dX} = e^{-\frac{1}{2}X}\frac{d}{dX}(-\frac{1}{2}X) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}X}$$

(b) $Y = e^{X^3}$

$$\frac{dY}{dX} = e^{X^3}\frac{d}{dX}X^3 = 3X^2e^{X^3}$$

(c) $Y = a^{nX}$

بأخذ لوغاريتم الطرفي

$$\therefore \quad \ln Y = nX\ln a$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = n\ln a$$

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = Yn\ln a = na^{nX}\ln a$$

(d) $Y = \ln X^n$

$$= n\ln X$$

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = n\frac{1}{X}$$

(e) $Y = \ln\sqrt{X}$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{\sqrt{X}}.\frac{1}{2\sqrt{X}} = \frac{1}{2X}$$

(f) $Y = X^X$

باخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln Y = X\ln X$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة X :

$$\therefore \quad \frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = X(\frac{1}{X}) + \ln X$$

$$\frac{dY}{dX} = Y(1 + \ln X)$$

$$= X^X(1 + \ln X)$$

تمـــــارين 8

أجد المشتقة الأولي للدوال الآتية : -

1) $Y = \ln(X^2 + 2X)$

2) $Y = (\ln X)^3$

3) $Y = \ln(\cos X)$

4) $Y = X \ln X - X$

5) $Y = \ln(X\sqrt{X^2 + 1})$

6) $Y = \ln \dfrac{1 + X}{1 - X}$

7) $Y = \ln(\ln X)$

8) $Y = \log_a(\sqrt[3]{(2X + 5)^2})$

9) $Y = e^{x^2} / (2X - 5)$

10) $Y = a^{x^2}$

11) $Y = e^{x^3}$

12) $Y = e^{\sqrt{x}}$

13) $Y = 6Xe^{x^2 - 1}$

14) $Y = e^{\sin x}$

15) $Y = e^{\sqrt{3x - 2}}$

16) $Y = e^{x^3 + 3x}$

17) $Y = e^{x} - e^{-x}$

18) $Y = e^{x} / X$

19) $Y = 3e^{\tan x^2}$

20) $Y = \ln(\cos e^{5x})$

21) $Y = (\cos X)e^{3x^2}$

22) $Y = \ln(x \sin X)$

23) $Y = \ln(\tan 3X)$

24) $Y = \ln \dfrac{5X}{1 - X^2}$

25) $Y = \ln(\sec^2 X)$

26) $Y = \log(4X - 3)$

27) $Y = (\ln X)(\sin X)$

28) $Y = \ln(X^3 - 1)^{1/3}$

29) $Y = \ln(X^3 \cos 2X)$

30) $Y = \ln(\ln X)$

قانون القيمة المتوسطة

نظرية رول:

اذا كانت F(X) دالة متصلة في الفترة $b \geq X \geq a$ وقابلة للاشتقاق وكان

$f(a) = f(b) = 0$ فانه:

يوجد على الأقل عدد واحد X_0 بين a,b تكون فيه $f'(X_0) = 0$

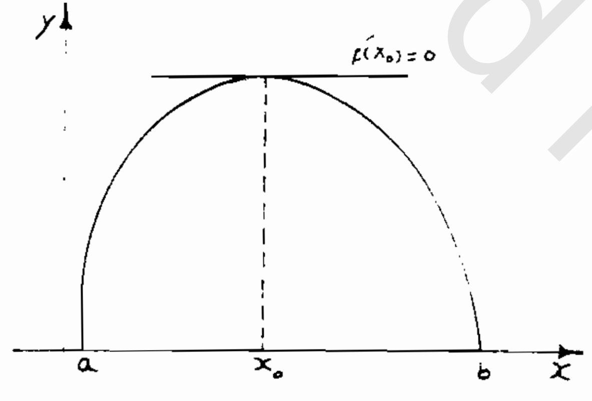
البرهان:

اما ان تكون f(X) مطابقة للصفر لجميع قيم $X(b > X > a)$ او ان تكون مختلفة عن الصفر لبعض قيم X في هذا المجال.

ففي الحالة الاولى يكون $f'(X)$ مطابقا للصفر والنظرية صحيحة في هذه الحالة.

اما في حالة ان تكون f(X) مختلفة عن الصفر لبعض قيم X في هذا المجال. فهي اما موجبة وتكون في المواضع الاخرى سالبة او العكس.

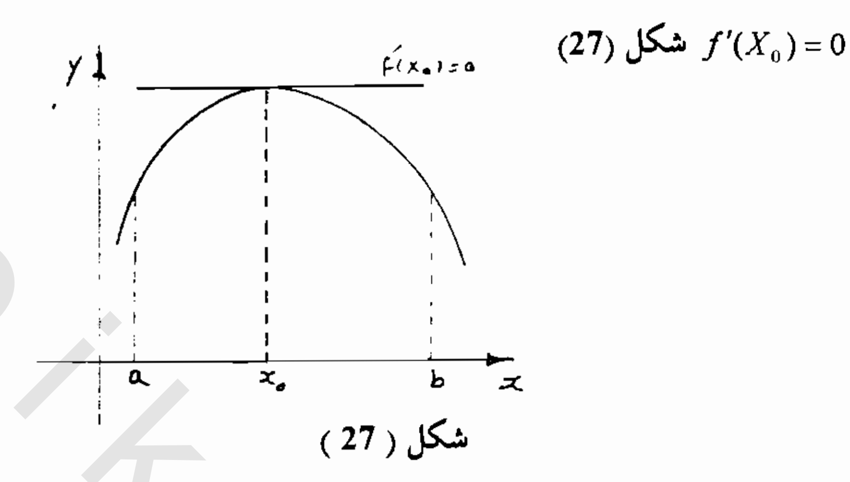
أي ان للدالة قيمة عظمى موجبة او قيمة صغرى سالبة أو كلا الآمرين بين a,b اذا يوجد على الأقل قيمة ل X بين $X = X_0 a,b$ عندها يكون $f'(X_0) = 0$ شكل (26).



شكل (26)

نتيجة :

اذا حققت الدالة f(X) شروط نظرية رول ولكن $f(a) = f(b) \neq 0$ تكون ايضا $f'(X_0) = 0$ شكل (27)



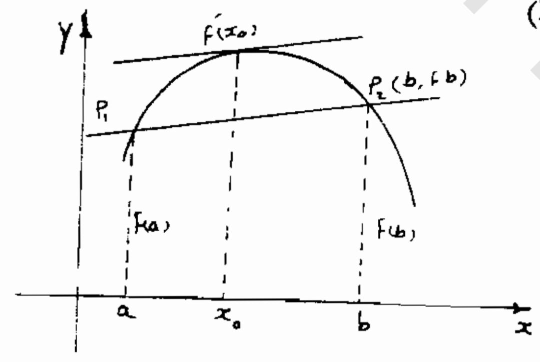
شكل (27)

قانون القيمة المتوسطة:

إذا كانت f(X) متصلة في الفترة $a \leq X \leq b$ وكانت f(X) موجودة عند كل موضع في هذه الفترة باستثناء نهايتي الفترة على الاكثر. فعندئذ يوجد على الاقل قيمة واحدة $X = X_0$ يكون عندها:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(X_0)$$

وهذا ما يوضحه شكل (28)



شكل (28)

ففي الشكل (28):

$f(X)$ منحنى متصل له مماس عند جميع نقاطه

P_1, P_2 نقطتين على المنحنى.

يكون ميل P_1P_2 مساويا الميل عند X_0

صيغ القانون:

$$I-\quad f(b)=f(a)+(b-a)f'(X_0) \qquad , \quad b>X_0>a$$

$$II-\quad f(X)=f(a)+(X-a)f'(X_0) \qquad , \quad X>X_0>a$$

$$III-\quad f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\theta(b-a)) \qquad , \quad 0<\theta<1$$

$$IV-\quad f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h) \qquad , \quad b-a=h$$

$$V-\quad f(X+\Delta X)=f(X)+\Delta X(X+\theta\Delta X)$$

مثال 1 :

أوجد قيمة X_0 الواردة في نظرية رول لكل مما يأتي:-

(a) $f(X)=X^3-12X \ , \quad 0\le X\le 2\sqrt{\ }$

(b) $f(X)=\sin X \quad , \quad 0\le X\le \pi$

الإجـــابـــة

$$(a) \quad f'(X) = 3X^2 - 12$$

$$f'(X) = 0$$

$$\therefore \ 3X^2 - 12 = 0$$

$$X^2 - 4 = 0$$

$$X = \pm 2$$

$$\therefore \quad X = X_0 = 2$$

$$(b) \quad f(X) = \sin X$$

$$f'(X) = \cos X$$

$$f'(X) = 0$$

$$\therefore \quad X = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \ n \in Z$$

$$X = X_0 = \frac{\pi}{2}$$

مثال 2:

أوجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة لكل من :-

$$(a) \quad f(X) = X^3, 0 \le X \le 6$$

$$(b) \quad f(X) = \ln X, 1 \le X \le 2e$$

الإجـــابـــة

$(a) \quad a = 0 \quad , b = 6$

$f'(X) = 3X^2$

$f'(X_0) = 3X_0^2$

$f(a) = f(0) = 0$

$f(b) = f(6) = 6^3$

$b - a = 6$

$f(b) = f(a) + (b - a) f'(X_0)$

$\therefore 6^3 = 0 + 6(3X_0^2)$

$X_0 = 2\sqrt{3}$

$(b) \quad a = 1 \quad , \quad b = 2e$

$\therefore f(a) = f(1) = 0$

$f(b) = f(2e) = 1 - \ln 2$

$b - a = 2e - 1$

$$f'(X) = \frac{1}{X}$$

$$f'(X_0) = \frac{1}{X_0}$$

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(X_0)$$

$$1 + \ln 2 = 0 + (2e - 1)\frac{1}{X_0}$$

$$X_0 = \frac{2e-1}{1+2\ln 2}$$

مثال 3:

استخدم قانون القيمة المتوسطة لحساب القيمة التقريبية $\sqrt{15}$

الحل : —

$b = 15 \quad , \quad a = 16$

$$f(X) = \sqrt{X}$$

$$f'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$f'(X_0) = \frac{1}{2\sqrt{X_0}}$$

$$f'(X_0) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = 0.125$$

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(X_0)$$

$$\sqrt{15} = 4 - 1(0.125)$$

$$= 3.875$$

تمـــــارين 9

1- اوجد قيمة X_0 الواردة في نظرية رول بفرض ان:

$(a) \quad f(X) = X^2 - 4X + 2 \quad , \quad 1 \le X \le 3$

$(b) \quad f(X) = \sin X \quad , \quad 0 \le X \le \pi$

$(c) \quad f(X) = \cos X \quad , \quad \frac{\pi}{2} \le X \le \frac{3\pi}{2}$

2 –هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالتين الاتيتين:—

$(a) \quad f(X) = \frac{X^2 - 4X}{X - 2}$

$(b) \quad f(X) = \frac{X^2 - 4X}{X + 2}$

3-ا وجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة اذا كانت:

$a = 1 \quad , \quad b = 3$

$f(X) = 3X^2 + 4X - 3$

4– استخدم قانون القيمة المتوسطة لحساب القيمة التقريبية لكل من :

$$\sqrt{15}, (3,001)^3, \frac{1}{999}, \sqrt[6]{65}$$

5 – المطلوب توسيع ثقب دائري في قطعة معدنية قطرها 10 سم وعمقها 30سم ليصبح قطرها 10.3 احسب كمية المعدن الذي تزيله من القطعة.

6 - استخدم قانون القيمة المتوسطة لاثبات ان:

$$\frac{X}{1+X} < \ln(1+X) < X$$

وذلك عند $1 < X < 0$ **وعند** $X > 0$

7 – استخدم قانون القيمة المتوسطة لاثبات ان:

$$\sqrt{1+X} < 1 + \frac{1}{2}X$$

وذلك عند $-1 < X < 0$ **و عند** $0 < X$

8- اوجد قيمة X_0 **الواردة في قانون القيمة المتوسطة لكل من:**

(a) $Y = X^2 \quad , \quad 0 \le X \le 6$

(b) $Y = aX^2 + bX + c \quad , \quad X_1 \le X \le X_2$

(c) $Y = \ln X \quad , \quad 1 \le X \le 2e$

9 – استخدم قانون القيمة المتوسطة لاثبات ان:

$$\frac{X}{1+X^2} < \tan^{-1} X < X$$

وذلك عند $0 < X$

التفـــاضـــلات

تعـــريـــف:

1 - اذا ما ضربنا المشتقة في dX يسمى حاصل الضرب بالتفاضل فمثلا:

المشتقة	التفاضل
$\frac{dc}{dX}=0$	$dc=0$
$\frac{dcu}{dX}=c\frac{du}{dX}$	$dcu=cdu$

2- وجود تفاضل dY مثلا على الطرف الايسر من المعادلة يستدعي وجود تفاضل dx في الطرف الايمن من المعادلة

3 – تعطى dx المسماة تفاضل X بالعلاقة: $dX=\Delta X$

تعطى dY المسماة تفاضل Y بالعلاقة: $dY=f'(X)dX$

مثال 1:

اذا كان : $Y=X^2$ اوجد dY والاختلاف فيها عن ΔX

الحل:

$$dY=2XdX\text{...}(1)$$

$$\Delta Y=(X+\Delta X)^2-X^2=2X\Delta X+(\Delta X)^2$$

$$=2XdX+(dX)^2\text{.......................................}(2)$$

من (1)و(2) نلاحظ ان ΔX تزيد عن dY بمقدار $(dX)^2$

التقريب بالتفاضل : -

اذا كان $dX = \Delta X$ صغير نسبيا بالنسبة لـــ X فان dY تقريب جيد و مناســـب لـــ ΔY

مثال 2:

إذا كان: $Y = X^2 + X + 1$

X تتغير من 1 إلي 1.01

أوجد $\Delta Y, dY$ والفرق بينهما

الحل :

$$
\begin{aligned}
Y + \Delta Y &= (X + \Delta X)^2 + (X + \Delta X) + 1 \\
\Delta Y &= (X + \Delta X)^2 + (X + \Delta X) + 1 - (X^2 + X + 1) \\
&= 2X\Delta X + (\Delta X)^2 + \Delta X \\
&= 2(1)(1.01) + (0.01)^2 + (0.01) \\
&= 0.0301 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\
dY &= Y'dX \\
&= (2X + 1)dX \\
&= (2(1) + 1)(0.01) \\
&= 0.03 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)
\end{aligned}
$$

بمقارنة (1),(2) نجد ان $dY \cong \Delta Y$ ويمكن اعتبارهما متساويتان لان الفرق بينهما ضئيل جدا (0.0001) .

مثال 3:

استخدم التفاضل لحساب القيمة التقريبية لكل من:

$(a)\quad \sqrt[3]{124}$

$(b)\quad \sin 60^\circ 1'$

الحل:

$(a)\quad Y = X^{\frac{1}{3}}$

$$dY = \frac{1}{3} X^{-\frac{2}{3}} dX$$

$X = 125$

$dX = -1$

$$\therefore dY = \frac{1}{3(125)^{\frac{2}{3}}}(-1) = -0.0133$$

$$\therefore \sqrt{124} = Y + \Delta Y$$

$$= 5 - 0.013 = 4.9867$$

$(b)\quad X = 60°$

$dX = 1'$

$Y = \sin X$

$= \sin 60 = 0.86603$

$dY = \cos X dX = (\cos 60)(0.0003) = 0.00015$

$\sin 60° 1' = Y + \Delta Y$

$= 0.866031 + 0.00015 = 0.86618$

تمـــــاريــــــن 10

1 - اوجد dY في كل مما يأتي : -

$(a)\quad Y = X^3 - 3X^2 + 5X$

$(b)\quad Y = (3X^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$

$(c)\quad X^2 Y = 4 - XY^2$

$(d)\quad Y = \dfrac{2X}{1 + X^2}$

$(e)\quad Y = X\sqrt{1 - X^2}$

$(f)\quad Y = \dfrac{1 - X - X^2}{1 - X}$

2- استعمل التفاضلات لتحصل على قيم معقولة لما يأتي:-

$(a)\quad \sqrt{145}\ ,\ (2.1)^3\ ,\ \sqrt[4]{17}\ ,\ \sqrt[3]{0.126}$

$(b)\quad (8.01)^{\frac{4}{3}}+(8.01)^2-\dfrac{1}{\sqrt[3]{8.01}}$

3 - اوجد التغير التقريبي في حجم مكعب طول ضلعه Xcm الناتج عن زيادة أطوال اضلاعه ب 1%

4 – استخدم التفاضل لحساب القيمة التقريبية للتغير في:

$(a)\quad X^3\ ,X=5\ \rightarrow\ X=5.01$

$(b)\quad \dfrac{1}{X}\ ,X=1\ \rightarrow\ X=0.98$

5 - تتمدد صفيحة دائرية تحت تاثير الحرارة بحيث يزداد نصف القطر من $12.5cm$ إلي $12.65cm$ اوجد الزيادة التقريبية في المساحة.

6 – اذا كانت $pv=20$ وقيست p فوجدت:

$p=5\pm 0.02$

فاوجد v.

نماذج اختبارات وحلولها

نموذج اختبار 1

س1 باستخدام التعريف اوجد المشتقة الاولى للاتي:-

$$1- \quad F(X) = 3X^2 - 5X + 4$$

$$2- \quad F(X) = \sqrt{X}$$

س2 أوجد $\frac{dY}{dX}$ للدوال الآتية:-

$$1- \quad Y = (X^2 - \frac{1}{X^2})^6$$

$$2- \quad Y = \sin^{-1} 3X \cos^{-1} 3X$$

$$3- \quad Y = (2X^2 - 1)\tan^3 5X$$

$$4- \quad Y = \ln\sqrt[3]{\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}}$$

$$5- \quad Y = (X^2 + 1)^{10} + 10^{X^2+1}$$

$$6- \quad Y = \tan^{-1} e^{2X}$$

س3 اوجد المشتقة الثانية للدالة:

$$Y^4 + 3Y - 4X^2 = 5X +$$

س4 اوجد معادلة العمودي للمنحنى: $Y = X^2 - 2X +$

عند كل نقطة من نقطتي تقاطعه مع المستقيم: $Y = X +$

إجابة نموذج اختبار رقم 1

1– $f(X)=3X^2-5X+4$

$$f(X+\Delta X)=3(X+\Delta X)^2-5(X+\Delta X)+4$$

$$f(X+\Delta X)-f(X)=3(X^2+2X\Delta X+(\Delta X)^2)-5X-5\Delta X+4-3X^2+5X-$$

$$=6X\Delta X+3(\Delta X)^2-5\Delta X$$

$$=\Delta X(6X-5+3\Delta X)$$

$$\frac{f(X+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}=\frac{\Delta X(6X-5+3\Delta X)}{\Delta X}$$

$$f'(X)=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{f(X+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}$$

$$=6X-5$$

2– $f(X)=\sqrt{X}$

$$f(X+\Delta X)=\sqrt{X+\Delta X}$$

$$\therefore f(X+\Delta X)-f(X)=\sqrt{X+\Delta X}-\sqrt{X}$$

$$\frac{f(X+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}=\frac{\sqrt{X+\Delta X}-\sqrt{X}}{\Delta X}\cdot\frac{\sqrt{X+\Delta X}+\sqrt{X}}{\sqrt{X+\Delta X}+\sqrt{X}}$$

$$f'(X)=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{f(X+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{X+\Delta X-X}{\Delta X(\sqrt{X+\Delta X}+\sqrt{X})}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{X}}$$

2—ج

1 − $$\frac{dY}{dX} = 6(X^2 - \frac{1}{X^2})^5(2X + \frac{2}{X^2})$$

2 − $$\frac{dY}{dX} = \frac{3}{\sqrt{1-9X^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-9X^2}} = \frac{6}{\sqrt{1-9X^2}}$$

3 − $$\frac{dY}{dX} = (2X^2 - 1)3(\tan^2 5X)(5)\sec^2 5X + 4X\tan^3 5X$$

$$= 15(2X^2 - 1)\tan^2 5X \sec^2 5X + 4X\tan^3 5X$$

4 − $$Y = \frac{1}{3}[\ln(X^2 - 1) - \ln(X^2 + 1)]$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{3}[\frac{2X}{X^2 - 1} - \frac{2X}{X^2 + 1}]$$

$$= \frac{1}{3}[\frac{2X(X^2 + 1) - 2X(X^2 - 1)}{X^4 - 1}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{X}{(X^4 - 1)}$$

5 − $$\frac{dY}{dX} = 10(X^2 + 1)^9 2X + 10^{X^2+1}.2X.\ln 10$$

$$= 20X(X^2 + 1)^9 + 2X(\ln 10)10^{X^2+1}$$

6 − $$\frac{dY}{dX} = \frac{2e^{2X}}{1 + e^{4X}}$$

3 —ج

$$4Y^3Y' + 3Y' - 12X^2 = 5$$

$$Y'(4Y^3 + 3) = 5 + 12X^2$$

$$\therefore Y' = \frac{5 + 12X}{4Y^3 + 3}$$

$$Y'' = \frac{(4Y^3 + 3)(24X) - (5 + 12X)\frac{5 + 12X^2}{4Y^3 + 3}}{(4Y^3 + 3)^2}$$

$$= \frac{(4Y^3 + 3)^2(24X) - 12Y^2(5 + 12X^2)^2}{(4Y^3 + 3)^2}$$

جـ4

$$X+1=X^2-2X+3$$
$$0=X^2-3X+2$$
$$0=(X-2)(X-1)$$

∴ نقطتي التقاطع هما : $X_2=2, X_1=1$

$$m_1=\frac{dY}{dX}=2X-2=\frac{-1}{0}$$
$$Y_1=X_1+1=1+1=2$$

∴ معادلة المماس هي:

$$Y-2=\frac{-1}{0}(X-1)$$

$\therefore\ X=1$ ⟵ المماس رأسي

$$m_2=1$$
$$m_2=\frac{1}{\frac{dY}{dX}}=\frac{-1}{(2X-2)}=\frac{-1}{(2(2)-2)}=\frac{-1}{2}$$
$$Y_2=X_2+1=2+1=3$$

معادلة العمودي هي:

$$Y-3=\frac{1}{2}(X-2)$$
$$2Y+X-8=0$$

نموذج اختبار رقم 2

س1 أ–أوجد المشتقة الأولى للدالة f(X) باستخدام المبادئ الأولية:

$f(X) = \sqrt{3X^2 - 1}$

ب– اوجد $\frac{d^2Y}{dX^2}$ اذا كان:–

$Y = Z^2 + 3Z$

$X = Z^3 + 2Z$

س2 اوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:–

1– $Y = \ln[\sec(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})]$

2– $Y = \tan^{-1}\frac{X}{Y}$

3– $Y = e^{-X}\csc\sqrt{X}$

4– $X^2Y^3 + \sin^{-1}(\cos X) = \sqrt[3]{X^2 + 1}$

س3 اوجد معادلتي المماس والعمودي للدالة: $Y = \frac{5X}{X^2 + 1}$ عند النقطة A(2.2)

س4 إذا كانت الدالة $f(X) = X^3 - 12X$ اوجد:–

1 - النهايات العظمى والصغرى واحداثياتها.

2– فترات التزايد والتناقص

3- اختبر النهايات العظمى والصغرى باستخدام المشتقة الثانية

حل أختبار رقم (2)

جـ(1) (أ)

$$Y = \sqrt{3X^2 - 1} \qquad i.e \quad F(X) = \sqrt{3X^2 - 1}$$

$$Y + \Delta Y = \sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} \qquad i.e. F(X + \Delta X) = \sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1}$$

$$\Delta Y = \sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}}{\Delta X}$$

بضرب المعادلة فى مرافق البسط :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}}{\Delta X} \cdot \frac{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} + \sqrt{3X^2 - 1}}{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} + \sqrt{3X^2 - 1}}$$

$$= \frac{3(X + \Delta X)^2 - 1 - (3X^2 - 1)}{\Delta X\left(\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}\right)}$$

$$= \frac{\Delta X(6X + 3\Delta X)}{\Delta X\left(\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}\right)}$$

بتطبيق النظرية :

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta X \to o} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$= \frac{6X}{2\left(\sqrt{3X^2 - 1}\right)} = \frac{3X}{\sqrt{3X^2 - 1}}$$

(ب) :

$$\frac{dY}{dZ} = 2Z + 3 \qquad \frac{dX}{dZ} = 3Z^2 + 2$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dZ} / \frac{dX}{dZ}$$

$$= \frac{2Z + 3}{3Z^2 + 2} \qquad \therefore \frac{dY^2}{dX^2} = \frac{d}{dZ}\left(\frac{2Z + 3}{3Z^2 + 2}\right) \cdot \frac{dZ}{dX}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{2(3Z^2 + 2) \quad - 12Z^2 - 18Z}{(3Z^2 + 2)^2} \cdot \frac{1}{3Z^2 + 2}$$

$$= \frac{4 - 18Z - 6Z^2}{((3Z^2 + 2)^3}$$

جـ2 :

$$1 - Y' = \frac{1}{\sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right)} \cdot \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right)$$

$$2 - Y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{X}{Y}\right)^2} \cdot \frac{d}{dX}\left(\frac{X}{Y}\right)$$

$$= \frac{Y^2}{Y^2 + X^2} \cdot \frac{Y - XY'}{Y^2}$$

$$Y' = \frac{Y - XY'}{Y^2 + X^2}$$

$$\therefore Y'(Y^2 + X^2) + XY' = Y$$

$$Y' = \frac{Y}{Y^2 + X^2 + 1}$$

$$3-\quad Y' = e^{-X}\left[-\csc\sqrt{X}\cdot\cot\sqrt{X}\cdot\frac{1}{2\sqrt{X}}\right] - e^{-X}\csc\sqrt{X}$$

$$= -\csc\sqrt{X}\,e^{-x}\left[\frac{\cot\sqrt{X}}{2\sqrt{X}} + 1\right]$$

$$4-\quad X^{2}(3Y^{2}Y') + 2XY^{3} + \frac{1}{\sqrt{1-(\cos X)^{2}}}\cdot(-\sin X) = \frac{1}{3}(X^{2}+1)^{-\frac{2}{3}}(2X)$$

$$3X^{2}Y^{2}Y' = \frac{2X}{3(X^{2}+1)^{\frac{2}{3}}} + 1 - 2XY^{3}$$

$$= \frac{2X + 3(X^{2}+1)^{\frac{2}{3}} - 6XY^{3}(X^{2}+1)^{\frac{2}{3}}}{3(X^{2}+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore Y' = \frac{2X + 3(X^{2}+1)^{\frac{2}{3}} - 6XY^{3}(X^{2}+1)^{\frac{2}{3}}}{9X^{2}Y^{2}(X^{2}+1)^{\frac{2}{3}}}$$

جـ 3 :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X^{2}+1)5 - 5X(2X)}{(X^{2}+1)^{2}}$$

$$= \frac{-5X^{2}+5}{(X^{2}+1)^{2}}$$

بالتعويض عن $X = 2$ لايجاد الميل :

$$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{-20+5}{(5)^{2}} = \frac{-15}{25} = \frac{-3}{5}$$

∴معادلة المماس هى :

$$Y - 2 = -\frac{3}{5}(X-2)$$

5Y-10 = -3 X+ 6

$\therefore 3X + 5Y - 16 = 0$

ولايجاد معادلة العمودى (حيث ميل العمودى $m_\perp$)

$m_\perp = \frac{5}{3}$

$\therefore Y - 2 = \frac{5}{3}(X - 2)$

$3Y - 6 = 5X - 10$

$5X - 3Y - 4 = 0$

جـ 4 ١- عند القيم الحرجة تكون $F'(X) = 0$ $\quad F'(X) = 3X^2 - 12$

$3X^2 - 12 = 0$

$X^2 - 4 = 0$

$\therefore$ القيم الحرجة عند : $X = \pm 2$

توقع القيم الحرجة على خط الأعداد :

		-2		2	
(X-2)	− − −		− − − − −		+ + + + + +
(X+2)	− − −		+ + + + +		+ + + + + +
F'(x)=	+ + +		− − − − − −		+ + + + + +
الفترات	(-∞,-2)		(-2,2)		(2,2)

عند $X = -2$

$f'(x)$ تغير اشارتها من (+) الى (-) وبالتالى تكون نهاية عظمى عند $X = -2$ قيمتها :

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16$$

أحداثى النهاية العظمى : $A(-2, 16)$

عند $X = 2$

$f'(x)$ تغير اشارتها من (-) الى (+) وبالتالى تكون نهاية صغرى عند $X = 2$ قيمتها :

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) = -16$$

إحداثى النهاية الصغرى : $B(2,-16)$

2 – فترات التزايد : $(-\infty, -2)$, $(2,2)$

فترة التناقص : $(-2,2)$

3– إختبار النهايات بالمشتقة الثانية :

$$f''(x) = 6X$$

عند $X = -2$

$$f''(-2) = -$$

∴ توجد نهاية عظمى عند $X = -2$ لأن $f''(X_0)$ سالبة

عند $X = 2$

$$f''(2) = +$$

∴توجد نهاية صغرى عند $X = 2$ لأن $f''(X_0)$ موجبة

تمرينات عامة فى

التفاضــــل



تمرين رقم (1)

أوجد قيمة المشتقى الأولى للدوال الآتية :

1 - $Y = (2X^2 - 1)\tan^3(5X)$

2 - $Y^2 = 3X^2 + \frac{X}{Y}$

3 - $Y = (\tan X^2 + \csc^{-1} X^2)^{\frac{1}{2}}$

4 - $Y = 3^{\sin^{-1} X^3}$

5- $Y = \frac{\sec 2X}{\tan(2X + 1)}$

6 - $Y = \frac{X \ln x}{1 - X} + \ln(1 - X)$

7- $Y = (\frac{X}{1 + x)})^5$

8- $e^y = X^{\sin x^2}$

9 - استخدام قاعدة السلسلة لايجاد $\frac{dY}{dX}$ حيث :

$u = X^2+2X \qquad Y = u^3+ 4$

10 - أوجد المشتقة الثانية للدالة :

$Y = X / \sqrt{X - 1}$

11 – حوض على شكل متوازى مستطيلات طولـــه 2m وعرضـــه 0.5m وعمقه 1m فإذا كان الماء ينساب فيه بمعدل $900 cm^3 s^{-1}$ فبأية سرعة يرتفع سطح الماء عندما يكون عمق الماء 25cm . $(0.09\ cms^{-1})$

12 – إختبر الدالة : $Y = X^2 + \frac{250}{X}$

لمعرفة إتجاه الانحناء وتحديد نقط الانقلاب والقيم العظمى والصغرى .

13 – استخدم قانون القيمة المتوسطة لتحسب قيمة :

$\frac{1}{999}$ و $(3.00)^3$

14 – من التعريف أوجد قيمة المشتقى الأولى للدالة :

$Y = \sqrt{X^2 - 3}$

15 – أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :

$Y = X^3 - 2X^2 + 4$

عند النقطة A (2,4)

تمرين رقم (2)

أوجد قيمة المشتقى الأولى للدوال الآتية :

1 - $Y = (X + 1)(X - 1)(X + 2)$

2 - $Y^2 = X^3 + \frac{X}{Y}$

3 - $Y = (\sin)^{\cos x}$

4 - $Y = (X^3 + X^2 + X)^{X3}$

5 - $Y = \sin^{-1}(\sin 5x)$

6 - $10 = \frac{X^4 + Y^3}{\cos xY + X}$

7 - $Y = \sqrt{1 + \sqrt{X}}$

8 – استخدم قاعدة السلسلة لايجاد $\frac{dY}{dX}$ حيث :

$u = x(3 - 2x)$ $\qquad$ $Y = \sqrt{x}$

9 – أوجد المشتقة الثانية للدالة :

$Y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

10 – يمشى رجل طوله 1.5m بمعدل $1.2ms^{-1}$ مبتعداً بشكل مباشر عن ضوء الشارع الذى يعلو 6m عن ارض الشارع .

أ – بأى معدل يتغير رأس ظل الرجل ؟ $(1.6\ ms^{-1})$

ب – بأى معدل يتغير طول الظل ؟ $(0.4ms^{-1})$

11 - إختبر الدالة : $Y = 3x + (x+2)^{\frac{3}{5}}$
لمعرفة إتجاه الانحناء وتحديد نقط الانقلاب .

12 - أوجد قيمة X_0 الواردة فى قانون القيمة المتوسطة بفرض أن

$Y = aX^2 + bX + c \qquad\qquad X_1 \leq X \leq X_2$

13 - من التعريف أوجد قيمة المشتقة الأولى للدالة :

$Y = \sqrt{3X^2 - X}$

14 - أوجد معادلة المماس عند النقطة $A(2, -2)$ للمنحنى :

$X^2 - Y^2 = 16$

تمرين رقم (3)

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

1 - $Y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{e^{x^2} + 5x}}}$

2 - $5 = \frac{X^2 + Y^2}{XY}$

3 - $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

4 - $Y = (\csc x)^{\csc x}$

5 - $Y = \log_3 (x^2 + 2)^3 + 5^{\sin x}$

6 - $Y = X^2 \tan^3 4x$

7 - $e^Y = \tan^{-1} x^2$

8 - يستند سلم أب طوله 5m على جدار منزل أوجد :

معدل حركة رأس السلم لأسفل إذا كان اسفل السلم على بعد 3m من الجدار ويبتعد عنه بمعدل $0.5ms^{-1}$.

$(\frac{3}{8} m s^{-1})$

9 - اختبر الدالة : $Y = x(12 - 2x)^2$

للحصول على القيم العظمى والصغرى مستخدماً طريقة المشتقة الثانية .

10 - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبين أن :

$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ عند $x > 0 , -1 < x < 0$

(إرشاد : $f(x) = \sqrt{x}$ واستخدم الصيغة IV $a = 1 , h = x$)

11 – استخدم قاعدة السلسلة لايجاد $\frac{dY}{dX}$:

$$y = t^3 - 3t + 5$$
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$$

12 – أوجد المشتقة الثانية للدالة :

$$Y = \sqrt{2 - 3x^2}$$

13 – باستخدام التعريف أوجد قيمة المشتقة الأولى للدالة :

$$Y = \sqrt{1 - X^2}$$

14 – أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :

$$X^2+3XY + Y^2 = 5$$

عند النقطة $A (1,1)$

الباب الثانى

التـــــكامل



التكــــــامل

تعريف : هو العملية العكسية للتفاضل .

نفرض أنه أعطى المشتقة : $\frac{dY}{dX} = f'(x)$

وأنه طلب ايجاد قيمة : $Y = f(x)$

فعملية إيجاد قيمة Y من المشتقة تسمى تكامل على المشتقة ويرمز لها بالرمز $\int$

<u>مثال تمهيدي</u> :

أوجد قيمة Y عندما :

$$\frac{dY}{dX} = 2x \qquad (1)$$

من خلال المعرفة بالمشتقات نجد أن :

$Y = x^2$

$Y = x^2 - 1$

$Y = x^2 + c$ (c ثابت)

حيث يوجد عدد لا نهائى من الأجوبة (مشتقة الثابت تساوى صفر) ولذلــــك

نضع الحل فى الصورة العامة :

$$Y = x^2 + c \qquad (2)$$

تسمى المعادلة (1) معادلة تفاضلية

،المعادلة (2) حل للمعادلة التفاضلية وتكتب هكذا

$$\int F'(x) = F(x) + c$$

$$\int \frac{dY}{dX} = Y + c$$

<u>مثال 1</u> إذا كان : $\frac{dY}{dX} = 3x^2$

أوجد قيمة Y (حل المعادلة التفاضلية)

الحـــــل :

$$dY = \frac{dY}{dX} dX$$

$$= 3x^2 dx$$

ومن الخبرة السابقة بالتفاضل نجد أن :

$$\frac{d(x)^3}{dX} = 3x^2$$

$$d(x^3) = 3X^2 dX$$

$$\therefore \int d(X^3) = \int 3X^2 dX$$

$$= X^3 + c$$

ونلاحظ أن الحل يتم بزيادة الأس واحد والقسمة على الأس الجديد أى أن :-

$$\int X^m dX = \frac{X^{m+1}}{m+1} \qquad , m \neq -1$$

معنى ثابت التكامل هندسياً :

اذا كان ميل المماس لمنحنى هو : $\frac{dY}{dX} = 1$

$\therefore Y = X + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$

فعند اى نقطة على المنحنى ولتكن (X , Y) ولتكن مثلاً :

(a) $\mathbf{X = 0 \quad , \quad Y = 0}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$\therefore 0 = 0 + C \quad \rightarrow \quad C = 0$

$\therefore Y = X$

(b) $\mathbf{X = 1 \quad , \quad Y = 0}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$\therefore 0 = 1 + C \quad \rightarrow \quad C = -1$

$\therefore Y = X - 1$

(c) $\mathbf{X = 2 \quad , \quad Y = 0}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$\therefore 0 = 2 + C \quad \rightarrow \quad C = -2$

(d) $\mathbf{X = 0 \quad , \quad Y = 1}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$\therefore 1 = 0 + C \quad \rightarrow \quad C = 1$

$\therefore Y = X + 1$

(e) $\mathbf{X = 0 \quad , \quad Y = 2}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$\therefore 2 = 0 + C \quad \rightarrow \quad C = 2$

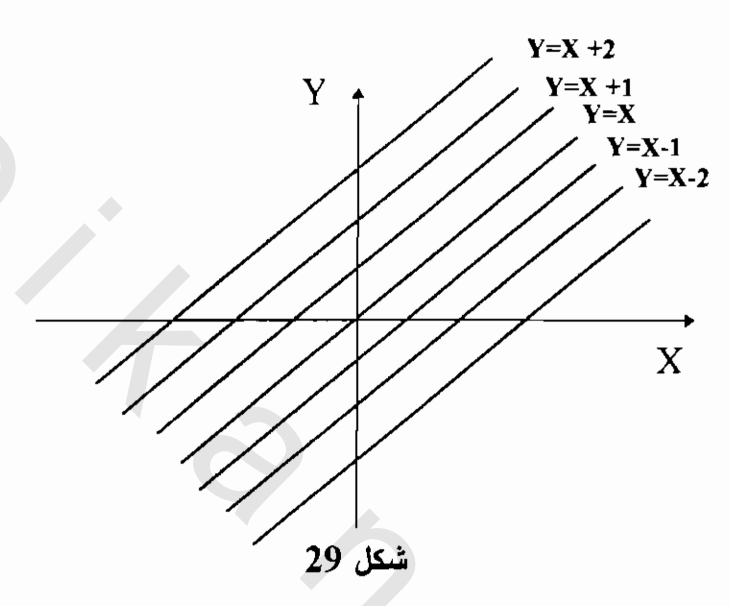
$\therefore Y = X + 2$

وهكذا .....

نلاحظ أن جميع المعادلات السابقة لها نفس الميل

أى أى $\frac{dY}{dX} = 1$ وممكن أن يكون أى منها حـــلاً للمعادلـــة $\frac{dY}{dX} = 1$

ويظهر هذا بشكل (29) ويتوقف هذا الحل على النقطة (X , Y) التى يمـــر بها الستقيم (المنحنى) .

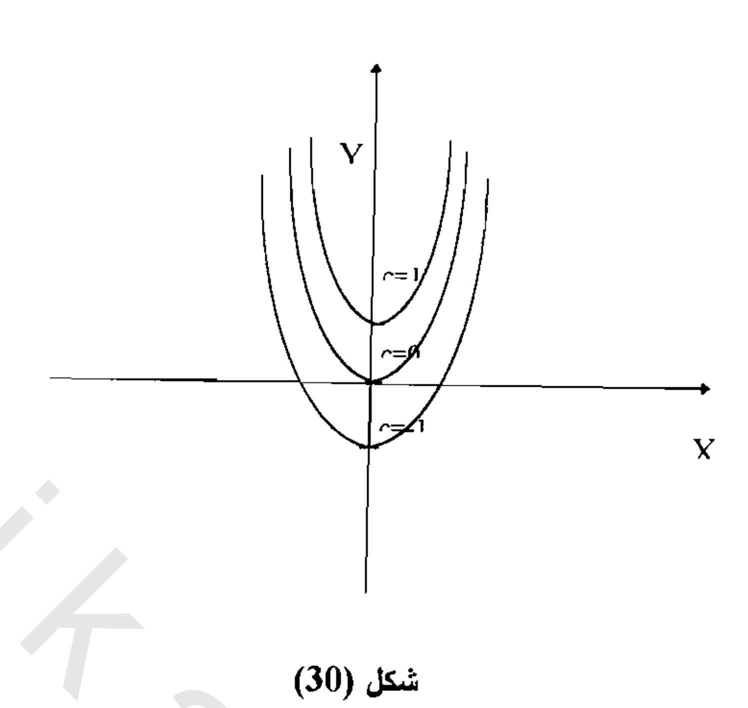


شكل 29

وبالمثل ايضاً عندما يكون : $\frac{dY}{dX} = 2X$ .... (1)

$$Y = \int 2X \; dX = X^2 + C$$

أى أن المنحنى $Y = X^2 + c$ والذى يأخذ إحدى المنحنيات المبينة فى الشكل رقم (30) وفقاً للنقطة التى يمر بها (X , Y) وكلها يكون ميل المنحنى فيهـــا هو 2X وأى من هذه المنحنيات ممكن أن يكون حلاً للمعادلة (1) .



شكل (30)

مثال 1 :

أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة A (2,4) وميل المماس له عنـــد أى نقطة هو: $3X^2-2X+1$

$$\frac{dY}{dX} = 3x^2 - 2x + 1$$

$$Y = \int (3x^2 - 2x + 1)\,dx$$

$$= x^3 - x^2 + x + c$$

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطة A(2,4) فهى تحقق معادلته

$$\therefore\ 4 = 2^3 - 2^2 + 2 + c$$

$$4 = 8 - 4 + 2 + c$$

$$c = -2$$

$$\therefore\ Y = x^3 - x^2 + x - 2$$

مثال 2 :

اذا كان ميل المماس لمنحنى هو $3x^2 - 2x + 5$ وكان هذا المنحنى يمر بـــ A(1,1) أوجد قيمة النقطة التى يقطع فيها المنحنى المحور y .

الحــــــــــل :

$$\frac{dY}{dX} = 3x^2 - 2x + 5$$

$$Y = \int (3x^2 - 2x + 5)\,dx$$

$$Y = x^3 - x^2 + 5x + c$$

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطة A(1,1) فهى تحقق معادلته :

$$\therefore\ 1 = 1 - 1 + 5 + c$$

$$c = -4$$

$$\therefore\ Y = x^3 - x^2 + 5x - 4$$

ولايجاد النقطة التى يقطع فيها المنحنى المحور Y نضع $x = 0$

$$\therefore\ Y = -4$$

∴ النقطة التى يقطع فيها المنحنى المحور Y هى : $B(0, -4)$

تمارين (1)

1 - أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $A(0,0)$ وميله يساوى $2x - \frac{1}{2}x^2$

2 - أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $A(1,1)$ وميله يساوى $\frac{-4}{x^2}$

3 - أوجد القانون الذى يربط بين المسافة (s) والزمن (t) اذا كان القانون الذى يربط بين السرعة (v) والزمن (t) معطى كالآتى :

$V = 2 + 3t \quad , \quad (s = 3 \quad , \quad t = 0)$

$V = t^2 + 4t - 5 \quad , \quad (s = 4 \quad , \quad t = 1)$

$V = 2 - \frac{1}{t^2} \quad , \quad (s = 3 \quad , \quad t = 1)$

4 - أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $A(3, -6)$ وميل المماس له عند اى نقطة عليه يساوى $x^2 - 10x$

طرق التكامل

بما أن عملية التكامل غير المحدد معرفة على أنها عكس عملية التفاضل فإن مسألة حساب قيمة تكامل $\int f(x) \, dx$ تكافئ إيجاد دالة F بحيث ان

$$dF(x) = f(x) \, dx$$

وقد يبدو فى أول الامر أننا سوف نتعرض لإسلوب (التجربة والخطأ) للحصول على قيمة التكامل المطلوب ومن أجل إنقاص هذا الأسلوب (التجربة والخطأ) فى الحل أنشأنا جدولاً نمطياً يحتوى على صيغ التكامل المختلفة عن طريق عكس صيغ التفاضل السابق دراستها وذلك لتسهيل عملية الحل .

وبالتالى يمكن إرجاع أى مقدار يراد إجراء عملية التكامل عليه ومضاهاته بأى من صيغ الجدول (جدول 3)

ولعل نجاح الطالب فى إجراء عملية التكامل يعتمد على خبرته وملاحظاته أثناء حل التمرينات وتعامله مع الصيغ المختلفة المذكورة بالجدول بالاضافة الى التمكن التام من إجراء عمليات التفاضل وسوف نتناول هنا الطرق المستخدمة فى حل التكاملات .

جـــــــدول 3

قواعد قياسية فى التفاضلات والتكاملات		
مسلسل	تكاملات	تفاضلات
1	$\int du = u + c$	$du = \frac{du}{dx} \cdot dx$
2	$\int a du = a \int du$	$dau = a \; du$
3	$\int (du + dv) = \int du + \int dv$	$d(u+v) = du + dv$
4	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \qquad n \neq 0$	$d(u)^n = nu^{n-1} du$
5	$\frac{du}{u} = \ln\|u\| + c$	$d(\ln u) = \frac{1}{u} du$
6	$a - \int e^u du = e^u + c$	$d\, e^u = e^u \; du$
	$b - \int a^u du = \frac{a^u}{\ln_a} + c$	$d \; a^u = a^u \ln a \; du$
	الدوال المثلثية :	
7	$\int \cos u \; du = \sin u + c$	$d \sin u = \cos u \; du$
8	$\int \sin u \; du = -\cos u + c$	$d \cos u = -\sin u \; du$
9	$\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$	$d \tan u = \sec^2 u \, du$
10	$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$	$d(\cot u) = -\csc u \; du$
11	$\int \sec u \; \tan u \; du = \sec u + c$	$d \; \sec u = \sec u \tan u \; u$
12	$\int \csc u \cot u \; du = -\csc u + c$	$d \; \csc u = -\csc u \cot u \; du$

	الدوال المثلثية :	
13	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \tan^{-1} u + c \\ -\cot^{-1} u + c \end{cases}$	$d \sin^{-1} u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ $d \cos^{-1} u = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \tan^{-1} u + c \\ -\cot^{-1} u + c \end{cases}$	$d \tan^{-1} u = \frac{du}{1+u^2}$ $d \cot^{-1} u = \frac{-du}{1+u^2}$
15	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} \sec^{-1} \lvert u \rvert + c \\ -\csc^{-1} \lvert u \rvert + c \end{cases}$	$d \sec^{-1} u = \frac{du}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}}$ $d \csc^{-1} u = \frac{-du}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}}$

الطرق المستخدمة فى حل التكاملات

1 - طريقة التكامل بالتعويض :

إذا كان المطلوب إيجاد $\int F(x)\ dx$ وكانت f(x) دالة مركبة غـــير واضحة ويمكن تحويلها بدلالة دوال بسيطة فإنه فى هـــذه الحالـــة يمكـــن أن تحصل على نتائج مفيدة عن طريق تغيير المتغير المستقل x الى متغير آخـــر u يسهل مضاهاته بصيغ التكامل المعروفة .

واذا ما حصلنا على التكامل فإننا بعد ذلك نعوض عن u بدلالـــة x الســابق تبديلها وبذلك نحصل على التكامل المطلوب .

مثال 1 : أوجد قيمة التكامل الآتى :

$$\int \sqrt{2x-1}\ dx$$

الحل : نفرض أن :

$$u = 2x - 1$$
$$du = 2dx$$
$$\frac{1}{2}du = dx$$

$$\therefore \int \sqrt{2x-1}\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3} + c$$

مثال 2 :

أوجد قيمة : $I = \int (3x+1)^4 \, dx$

الحل :

نفرض أن :

$u = 3x + 1$

$du = 3dx$

$$I = \int \frac{1}{3} u^4 \, du$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{1}{15} (3x+1)^5 + c$$

مثال 3 :

أوجد قيمة $I = \int \sqrt{x^3 - 1} \; x^2 \, dx$

الحل :

نفرض أن :

$u = x^3 - 1$

$du = 3x^2 \, dx$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}} \, du$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}(x^3 - 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3 - 1)^3} + c$$

مثال 4 :

أوجد قيمة : $I = \int \frac{x-2}{(x^2-4x+3)^2} dx$

الحل :

نفرض أن : $u = x^2 - 4x + 3$ ....(1)

$du = 2x - 4 = 2(x-2)$ .... (2)

بالتعويض من (1) ، (2) فى التكامل الأصلى بمراعاة تغيير x , dx الى du , u

$$\therefore I = \int \frac{(x-2)}{u^3} \frac{du}{2(x-2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^3} du$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{u^{-2}}{-2}) + c$$

$$= -\frac{1}{4}(\frac{1}{u^2}) + c$$

$$= -\frac{1}{4}(\frac{1}{(x^2-4x+3)^2}) + c$$

مثال 5:

أوجد قيمة : $I = \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3} dx$

الحل :

نفرض أن :

$$u = \sqrt{x} + 1$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad \rightarrow dx = 2\sqrt{x} \ du$$

$$\therefore I = \int \frac{1}{u^3} (2du)$$

$$= 2(\frac{u^{-2}}{-2}) + c$$

$$= -\frac{1}{u^2} + c$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} + c$$

تمـــــارين 2

أوجد قيمة التكاملات الآتية باستخدام التعويض

1 - $\int x^2 (3x^3 + 5)^4 \, dx$

2 - $\int x^2 (3x^3 - 1)^2 \, dx$

3 - $\int \frac{x}{\sqrt{1 - 2x^2}} \, dx$

4 - $\int \frac{x}{x^2 - 1} \, dx$

5 - $\int \frac{x^2}{2x^3 + 3} \, dx$

6 - $\int x\sqrt{x - 1} \, dx$

7 - $\int x(5 - x^2)^3 \, dx$

8 - $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \, dx$

9 - $\int (1 + \frac{1}{x})^2 \frac{1}{x^2} \, dx$

10 - $\int (3 - x^4)^3 x^3 \, dx$

11 - $\int \frac{x}{\sqrt{x - 1}} \, dx$

12 - $\int \frac{2x + 4}{\sqrt{2x + 5}} \, dx$

2 - التكامل بالتجزئة

نعلم أنه اذا كانت u , v دالتين قابلتين للاشتقاق فإن :

$$d\,uv = u\,dv + v\,du$$

$$u\,dv = d\,uv - v\,du$$

$$\therefore \int u\,dv = uv - \int v\,du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

تستخدم القاعدة (1) فى حساب هذا النوع من التكامل مع مراعاة الآتى :

أ - فصل التكامل المعطى الى جزئين هما u , dv .

ب - يجب أن يكون الجزء dv قابلاً للتكامل مباشرة .

جـ - يجب الا يكون $\int v\,du$ أكثر تعقيداً من $\int u\,dv$

مثال 1 : أوجد قيمة : $\int x \cos x\,dx$

الحل :

$u = x \qquad\qquad d\,u = dx$

$v = \sin x \qquad\qquad d\,v = \cos x\,dx$

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

مثال 2 :

أوجد قيمة : $\int x^2 \sin x\,dx$

الحل :

$u = x^2 \qquad\qquad d\,u = 2x\,dx$

$v = -\cos x \qquad\qquad d\,v = \sin x\,dx$

$$\therefore \int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x - \int -\cos x\,(2x)\,dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرة أخرى فى ايجاد قيمة $\int x\cos x\ dx$

$u = x \qquad du = dx$

$v = \sin x \qquad dv = \cos x\, dx$

$$\therefore \int x\cos x\ dx = x\sin x - \int \sin x\ dx$$

$$= x\sin x + \cos x + c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

نعوض من المعادلة (2) فى المعادلة رقم (1)

$$\therefore \int x^2 \sin x\ dx = -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x + c_1)$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x) + c$$

مثال 3 :

أوجد قيمة : $I = \int x\ln x\ dx$

<u>**الحل :**</u>

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\, dx$

$v = \frac{x^2}{2} \qquad dv = x\, dx$

$$\therefore I = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

تمارين 3

إستخدم التكامل بالتجزئة لايجاد قيمة التكاملات الآتية :

1 - $\int x \sec^2 x \; dx$

2 - $\int x \cos \; 2x \; dx$

3 - $\int x e^{-x} \; dx$

4 - $\int x^3 \cos 2x \; dx$

5 - $\int x \; e^{3x} \; dx$

6 - $\int x^3 \; e^x \; dx$

7 - $\int \sqrt{x} \; \ln x \; dx$

8 - $\int e^x \cos x \; dx$

9 - $\int (\ln x / \sqrt{x}) \; dx$

10 - $\int x^2 \ln x \; dx$

11 - $\int x(x+1)^{\frac{1}{2}} \; dx$

12 - $\int \ln \; (x+1) \; dx$

13 - $\int (\ln x)^2 \; dx$

14 - $\int \sin^{-1} x \; dx$

التكاملات المثلثية

تستخدم المتطابقات التالية فى هذه التكاملات :

1 - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2 - $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

3 - $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

4 - $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

5 - $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

6 - $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

7 - $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin (x - y) + \sin(x + y)\right]$

8 - $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos (x \; y) - \cos (x - y)\right]$

9 - $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos (x - y) + \cos (x + y)\right]$

أمثلة محلولة

1 - أوجد قيمة : $\int \sin^2 x \, dx$

الحل :

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) + c$$

2 - أوجد قيمة : $\int \cos^2 3x \, dx$

الحل :

$$\int \cos^2 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}(x+\frac{1}{6}\sin 6x)+c$$

3 – أوجد قيمة : $\int \sin^3 x \; dx$

الحل :

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\, dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x\, dx$$
$$= \cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

<u>إرشاد :</u>

عند إجراء التكامل : $\int \cos^2 x \sin x \; dx$

ضع $u = \cos x$

$du = -\sin x \; dx$

$$\therefore \int \cos^2 x \sin x \; dx = -\int u^2 \; du$$
$$= -\frac{1}{3}u^3 + c$$
$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

4 – أوجد قيمة : $I = \int \cos^5 x \; dx$

الحل :

$$I = \int \cos^4 x \cdot \cos x \; dx$$
$$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x \; dx$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x \; dx$$

<u>**إرشاد :**</u>

ضع $u = \sin x$ $\quad du = \cos x \, dx$

$$\therefore I = \int (1 - 2u^2 + u^4)\, d\,u$$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

5 – أوجد قيمة : $I = \int \tan^4 x \; dx$

الحل :

$$I = \int \tan^2 x \;(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^2 x \;\sec^2 x \; dx - \int \tan^2 x \; dx$$

$$= \int \tan^2 x \;\sec^2 x \; dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

إرشاد : ضع :

$u = \tan x$ $\qquad du = \sec^2 x \, dx$

$$I = \int u^2 \; du - \int du + \int dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$$

6 – أوجد قيمة : $I = \int \tan^5 x \; dx$

الحل :

$$I = \int \tan^3 x\,(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^3 x \sec^2 x \, dx - \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + c$$

ارشاد : استخدم نفس الارشاد السابق فى الجزء الأول

7 - أوجد قيمة : $I = \int \sec^4 x \; dx$

الحل :

$$I = \int \sec^2 2x(1+\tan^2 2x)\; dx$$

$$= \int \sec^2 2x dx + \int \tan^2 2x \cdot \sec^2 2x \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{6}\tan^3 2x + c$$

8 - أوجد قيمة : $I = \int \cot^3 2x \; dx$

الحل :

$$I = \int \cot 2x \; (\csc^2 2x - 2)\, dx$$

$$= \int \cot 2x \; \csc^2 2x \, dx - \int \cot 2x \; dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cot^2 2x + \frac{1}{2}\ln|\csc 2x| + c$$

ملحوظة : بفرض $u = \cot 2x$

$du = -2\csc^2 2x \; dx$ يتم حل الجزء الأول من التكامل

9 - أوجد قيمة : $I = \int \cot 3x \; \csc^4 3x \; dx$

الحل :

$$I = \int \cot 3x\,(1+\cot^2 3x)\csc^2 3x \; dx$$

$$= \int \cot 3x \; \csc^2 3x \; dx + \int \cot^3 3x \csc^2 3x \; dx$$

$$= -\frac{1}{6}\cot^2 3x - \frac{1}{12}\cot^4 3x + c$$

تمــــارين 4

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1 - $\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\,dx$

2 - $\int \sin 2x \;\; \tan 2x \;\; dx$

3 - $\int (\tan 3x \; + \; \sec \; 3x \;)\; dx$

4 - $\int \tan x - \sec^2 x \;\; dx$

5 - $\int \sin x \;\; \cos x \;\; dx$

6 - $\int \frac{\tan^2 2x}{\sec 2x}\, dx$

7 - $\int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x}\, dx$

8 - $\int \frac{e^{\cos x}}{\csc x}\, dx$

9 - $\int \frac{e^{x}}{\cos e^{x}}\, dx$

10 - $\int \frac{\sec^2 x^2}{\tan x^2}\, x \;\; dx$

11 - $\int \frac{\sec^2 x}{2 \tan x + 1}\;\; dx$

12 - $\int \frac{x e^{x^2}}{\cos e^{x^2}}\, x \;\; dx$

13 - $\int \sin^2 x \;\; \cos x \;\; dx$

14 - $\int \sqrt{1 + \cos x} \;\;\; dx$

التعويضات المثلثية

تستخدم بعض التعويضات لتسهيل اجراء بعض التكاملات كما في الجدول (4) الاتي:

الدالة	التعويض المناسب	قيمة الدالة بعد التعويض
(a) $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\sin\theta$	$a\sqrt{1-\sin^2\theta} = a\cos\theta$
(b) $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\tan\theta$	$a\sqrt{1+\tan^2\theta} = a\sec\theta$
(c) $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b}\sec\theta$	$a\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a\tan\theta$

امثلة محلولة

1 – أوجد قيمة : $I = \int \frac{dX}{X^2\sqrt{4+X^2}}$

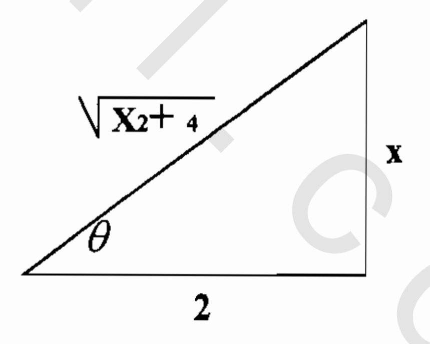
الحل:

نستخدم التعويض :

$X = 2\tan\theta$

$dX = 2\sec^2\theta d\theta$

ويتم رسم المثلث : (شكل 31)



شكل 31

$$\therefore \tan\theta = \frac{X}{2}$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{2\sec^2\theta \, d\theta}{(2\tan\theta)^2 \sqrt{4 + 4\tan^2\theta}}$$

$$= \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta \cdot 2\sec\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int (\sin\theta)^{-2} \cos\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4\sin\theta} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{4 + X^2}}{4X} + c$$

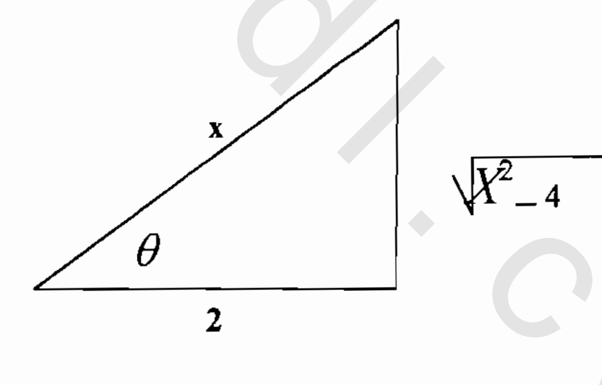
2 – أوجد قيمة: $I = \int \frac{X^2 \, dX}{\sqrt{X^2 - 4}}$

الحل :

ضع:

$$X = 2\sec\theta$$
$$dX = 2\sec\theta\tan\theta \, d\theta$$

مع رسم مثلث التعويض : $\sec\theta = \frac{X}{2}$ (شكل 32)



شكل 32

$$\therefore I = \int \frac{(2\sec\theta)^2 \, 2\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{(2\sec\theta)^2 - 4}} d\theta$$

$$= \int \frac{(4\sec^2\theta) 2\sec\theta\tan\theta}{2\tan\theta} d\theta$$

$$= 4\int \sec^3\theta \, d\theta = 4I_1 \text{..........} (1)$$

$$I_1 = \int \sec^3\theta \, d\theta$$

$$= \int \sec\theta\sec^2\theta \, d\theta$$

نستخدم التكامل بالتجزئة:

$u = \sec\theta$ $\qquad du = \sec\theta\tan\theta \, d\theta$

$v = \tan\theta$ $\qquad dv = \sec^2\theta \, d\theta$

$$\therefore I_1 = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\tan^2\theta \, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1) d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta \, d\theta + \int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - I_1 + \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$\therefore 2I_1 = \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c \text{...............} (2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1)

$$\therefore \quad I = 4I_1 = 2\sec\theta\tan\theta + 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

بالتعويض عن النسب المثلثية من مثلث التعويض

$$\therefore I = 2(\frac{X}{2} \cdot \frac{\sqrt{X^2 - 4}}{2} + 2\ln\left|\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{X^2 - 4}}{2}\right| + c$$

3 –أوجد قيمة: $I = \int \frac{\sqrt{9 - 4X^2}}{X} dX$

الحل:

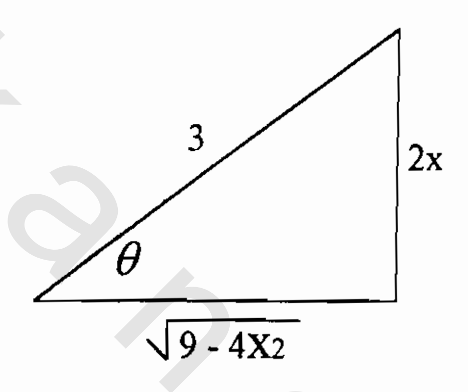
بفرض ان:

$$X = \frac{3}{2}\sin\ \theta$$

$$dX = \frac{3}{2}\cos\ \theta\ \ d\theta$$

$$\sin\ \theta = \frac{2X}{3}$$

برسم مثلث التعويض : (شكل 33)



شكل 33

$$\therefore I = \int \frac{3\cos\theta \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sin\theta}\cos\theta\ d\theta$$

$$= 3\int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$= 3\int \csc\theta\ d\theta - \int \sin\theta\ d\theta$$

$$= 3(\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + \cos\theta + c$$

$$= 3(\ln\left|\frac{3}{2X} - \frac{\sqrt{9-X^2}}{2X}\right| + \frac{\sqrt{9-X^2}}{3} + c$$

4- أوجد قيمة: $I = \int \frac{(16-9X^2)^{\frac{3}{2}}}{X^6}\ dX$

الحل:

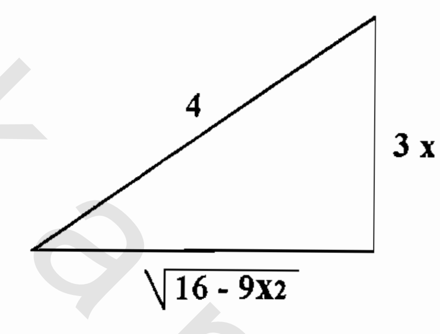
ضع التعويض :

$$X = \frac{4}{3}\sin\theta$$

$$dX = \frac{4}{3}\cos\theta\, d\theta$$

$$\sin\theta = \frac{3X}{4}$$

مثلث التعويض (شكل 34)



شكل 34

ضع

$$u = \cot^4\theta \qquad du = -4\cot^3\theta\csc^2\theta\, d\theta$$

$$v = -\cot\theta \qquad dv = \csc^2\theta\, d\theta$$

$$I = {}^{243}\!/_{16}\left[-\cot^5\theta - \int 4\cot^4\theta\cdot\csc^2\theta\, d\theta\right] = -\frac{243}{16}\cot^5\theta - \left(\frac{243}{16}\right)4\left(\frac{16}{243}\right)$$

$$I = -\frac{243}{80}\cot^5\theta = -\frac{243}{80}\frac{(16-9X^2)^{\frac{5}{2}}}{243X^5}$$

$$= -\frac{1}{80}\frac{(16-9X^2)^{\frac{5}{2}}}{X^5}$$

الدوال المثلثية العكسية في التكاملات:

$$\frac{d}{du}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{a})^2}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$\therefore \int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + c$$

$$\frac{d}{du}\tan^{-1}(\frac{u}{a}) = \frac{1}{1+(\frac{u}{a})^2}\cdot\frac{1}{a}$$

$$= \frac{a}{a^2+u^2}$$

$$\therefore \quad \int\frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{u}{a}) + c$$

مثال 1:

أوجد قيمة:

$$I = \int\frac{dX}{\sqrt{16-X^2}}$$

الحل:

$$\int\frac{dX}{\sqrt{16-X^2}} = \int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + c$$

$$u = X$$

$$du = dX$$

$$a = 4$$

$$\therefore \qquad I = \sin^{-1}\frac{X}{4} + c$$

مثال 2 :

أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{dX}{X^2 + 2X + 5}$$

الحل:

$$X^2 + 2X + 5 = (X+1)^2 + 4$$
$$= (X+1)^2 + 2^2$$

بفرض أن : $u = X + 1 \ , \quad du = dX \ , \quad a = 2$

$$\therefore I = \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{u}{a}) + c$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{X+1}{2}) + c$$

مثال 3:

أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{dX}{\sqrt{25 - 4X^2}}$$

الحل:

$$I = \int \frac{du/2}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$u = 2X$$
$$du = 2dX$$
$$a = 5$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) + c$$
$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{2X}{5}) + c$$

تمـــاريـــن 5

أوجد قيم التكاملات التالية:

$1-\int \frac{dX}{\sqrt{1-4X^2}}$

$2-\int \sqrt{a^2-X^2}\,dX$

$3-\int \frac{dX}{\sqrt{4-(X-1)^2}}$

$4-\int \frac{dX}{(4-X^2)^{\frac{1}{2}}}$

$5-\int \frac{dX}{\sqrt{4+X^2}}$

$6-\int \frac{dX}{\sqrt{4-X^2}}$

$7-\int \frac{XdX}{\sqrt{4+X^2}}$

$8-\int \frac{XdX}{4+X^2}$

$9-\int \frac{dX}{4+X^2}$

$10-\int \frac{X^2}{\sqrt{X^2-16}}dX$

$11-\int \frac{X+1}{\sqrt{4-X^2}}dX$

$12-\int \frac{dX}{X\sqrt{a^2+X^2}}$

$13-\int \frac{\sin X\,dX}{\sqrt{2-\cos^2 X}}$

$14-\int \frac{dX}{\sqrt{144-25X^2}}$

$15-\int \frac{dX}{(a^2+X^2)^{\frac{3}{2}}}$

$16-\int \frac{dX}{X\sqrt{a^2-X^2}}$

$17-\int \frac{dX}{(a^2+X^2)^2}$

$18-\int \frac{(X-1)dX}{\sqrt{8+2X-X^2}}$

$19-\int \frac{(X+1)dX}{\sqrt{2X-X^2}}$

$20-\int \frac{dX}{\sqrt{X^2-8X+12}}$

$21-\int \frac{XdX}{\sqrt{X^2+4X+5}}$

$22-\int \frac{(2X+3)dX}{4X^2+4X+5}$

$23-\int \frac{\sec^2 X\,dX}{1+\tan^2 X}$

$24-\int \frac{e^X}{\sqrt{1-e^{2X}}}dX$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية:

درسنا فيما سبق الكسور الجزئية وعرفنا أن الكسر الغير حقيقي هو عبارة عن كسر حقيقي+دالة كثيرة الحدود. وينتج من حاصل قسمة البسط على المقام (درجة البسط $\leq$ درجة المقام).

وان الكسر الحقيقي هو حاصل قسمة كثيرتي الحدود وتكون درجة البسط فيه اقل من درجة المقام.

ودرسنا طرق تحليل الكسر الحقيقي إلى كسوره الجزئية، وسوف ندرس هنا التكاملات باستخدام الكسور الجزئية:

الحالة I: معاملات المقام من الدرجة الاولى ومختلفة:-

مثال 1:

أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{1}{X^2 - 4} dX$$

الحل:

يتم تحليل الكسر الحقيقي إلى كسوره الجزئية:

$$\frac{1}{X^2 - 4} = \frac{A}{X - 2} + \frac{B}{X + 2}$$

وبتوحيد المقام ليصبح $(X - 2)(X + 2)$

$$\therefore 1 = A(X + 2) + B(X - 2)$$

وبمساواة قوى X المختلفة في الطرفين:

$$\therefore \quad 1 = 2A - 2B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$0 = A + B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) ينتج أن :

$$A=\frac{1}{4} \qquad B=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{X^2-4}=\frac{1}{4(X-2)}-\frac{1}{4(X+2)}$$

$$\int\frac{dX}{X^2-4}=\int\frac{dX}{4(X-2)}-\int\frac{dX}{4(X+2)}$$

$$=\frac{1}{4}\ln(X-2)-\frac{1}{4}\ln(X+2)+c$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{X-2}{X+2}+c$$

الحالة II : بعض عوامل المقام من الدرجة الأولى ومتساوية:

مثال 2:

اوجد قيمة:

$$I=\int\frac{3X+5}{X^3-X^2-X+1}dX$$

الحل:

$$\frac{3X+5}{X^3-X^2-X+1}=\frac{3X+5}{(X+1)(X-1)^2}$$

$$=\frac{A}{X+1}+\frac{B}{X-1}+\frac{C}{(X-1)^2}$$

وبتوحيد المقام إلى $(X+1)(X-1)^2$ ينتج ان:

$$3X+5=A(X-1)^2+B(X-1)(X+1)+C(X+1)$$

نضع X=1

$$8=2C\rightarrow C=4$$

نضع X=-1

$$2=4A\rightarrow A=\frac{1}{2}$$

نضع X=0

$$\therefore 5 = A - B + C$$

$$= \frac{1}{2} - B + 4$$

$$B = 4\frac{1}{2} - 5 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3X+5}{X^3 - X^2 - X + 1} = \frac{1}{2(X+1)} - \frac{1}{2(X-1)} + \frac{4}{(X-1)^2}$$

$$\int \frac{3X+5}{X^3 - X^2 - X + 1} dX = \int \frac{dX}{2(X+1)} - \int \frac{dX}{2(X-1)} + \int \frac{4dX}{(X-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(X-1) - \frac{1}{2}\ln(X-1) - \frac{4}{X-1} + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{X+1}{X-1} - \frac{4}{X-1} + c$$

الحالة III: بعض عوامل المقام من الدرجة الثانية ولايتحلل:

مثال 3:

أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{X^3 + X^2 + X + 2}{X^4 + 3X^2 + 2} dX$$

الحل:

$$\frac{X^3 + X^2 + X + 2}{X^4 + 3X^2 + 2} = \frac{AX+B}{X^2+1} + \frac{CX+D}{X^2+2}$$

بعد توحيد المقام في الطرفين

$$\therefore X^3 + X^2 + X + 2 = (AX+B)(X^2+2) + (CX+D)(X^2+1)$$

$$= (A+C)X^3 + (B+D)X^2 + (2A+C)X + 2B + D$$

بمساواة قوى X المختلفة في الطرفين:

$2B + D = 2$................(1)

$2A + C = 1$................(2)

$B + D = 1$..................(3)

$A + C = 1$..................(4)

بحل المعادلتين (2) و (4) ينتج ان:

$$A = 0 \rightarrow C = 1$$

بحل المعادلتين (1) و (3) ينتج ان:

$$B = 1 \rightarrow D = 0$$

وبالتعويض عن الثوابت

$$\therefore \int \frac{X^3 + X^2 + X + 2}{X^4 + 3X^2 + 2} dX = \int \frac{dX}{X^2 + 1} + \int \frac{X\,dX}{X^2 + 2}$$

$$= \tan^{-1} X + \ln(X^2 + 2) + c$$

تمـــاريـــــن 6

أوجد قيمة التكاملات الآتية باستخدام الكسور الجزئية:

1 – $\int \frac{dX}{X^2 - 9}$

2 – $\int \frac{2X + 1}{X^2 + 10X + 21} dX$

3 – $\int \frac{dX}{X^2 + 7X + 6}$

4 – $\int \frac{X - 4}{X(X - 2)} dX$

5 – $\int \frac{X\ dX}{(X - 2)^2}$

6 – $\int \frac{X - 1}{X + 1} dX$

7 – $\int \frac{6X}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} dX$

8 – $\int \frac{X^2 + 3X - 2}{(X - 1)(X^2 - 1)} dX$

9 – $\int \frac{-2X + 4}{(X^2 + 1)(X - 1)^2} dX$

10 – $\int \frac{X + 1}{X^2(X - 1)} dX$

11 – $\int \frac{dX}{(X^2 - 1)^2}$

12 – $\int \frac{X^4 + 9}{X^2(X^2 + 9)} dX$

تعويضات اخرى في التكاملات:

اذا كانت u,v دالتين في x تسمى النسبة $\frac{u}{v}$ كثيرة الحدود بوجه عام بدالة قياسية حيث تكون كلمة نسبة بمثابة كلمة قياسي.

كما انه يمكن تحويل مسالة تكامل أي دالة قياسية في cos X , sin X إلى مسالة تحتوي على دالة قياسية في z ثم تحل بعد ذلك بالطرق المعتادة، وذلك بوضع:

$$Z = \tan\frac{X}{2}$$

نعلم ان:

$$\cos X = 2\cos^2\frac{X}{2} - 1$$

$$= \frac{2}{\sec^2\frac{X}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1+\tan^2\frac{X}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1+Z^2} - 1$$

$$= \frac{1-Z^2}{1+Z^2} \quad \text{..................(1)}$$

$$\sin X = 2\sin\frac{X}{2}\cos\frac{X}{2}$$

$$= 2\frac{\sin\frac{X}{2}\cos^2\frac{X}{2}}{\cos\frac{X}{2}}$$

$$= \frac{2\tan\frac{X}{2}}{\sec^2\frac{X}{2}}$$

$$= \frac{2Z}{1+Z^2} \quad \text{..................(2)}$$

تستخدم المعادلات 1 و 2 في حل كثير من المسائل.

مثال :

أوجد قيمة: $\int \sec X \ dX$

الحل:

$$I = \int \sec X \ dX = \int \frac{1}{\cos X} dX$$

$$= \int \frac{1+Z^2}{1-Z^2} \cdot \frac{2dZ}{1+Z^2}$$

$$= \int \frac{2 \ dZ}{1-Z^2}$$

$$\frac{2}{1-Z^2} = \frac{A}{(1-Z)} + \frac{B}{(1+Z)}$$

$$2 = A(1+Z) + B(1-Z)$$

وبحل المتطابقة:

$$\therefore A = B = 1$$

$$\therefore \int \frac{2dZ}{1-Z^2} = \int \frac{dZ}{1-Z} + \int \frac{dZ}{1+Z}$$

$$= -\ln|1-Z| + \ln|1+Z| + c$$

$$= \ln \frac{1+Z}{1-Z} + c$$

$$= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{X}{2}}{1-\tan\frac{X}{2}}\right| + c \quad = \ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \frac{\tan X}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{X}{2}}\right| + c$$

$$= \ln\left|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2})\right| + c$$

امثلة محلوله منوعة

أوجد قيمة التكاملات الآتية:-

1- $\int X\sqrt[3]{X^2+5}\ dX$

2- $\int 10^{2X}\ dX$

3- $\int \sin 4X \cos 3X\ dX$

4- $\int \frac{\cos X}{1+\sin X} dX$

5- $\int \frac{1}{X \ln X} dX$

6- $\int \frac{\cot X - 1}{\sin^2 X} dX$

7- $\int \frac{2X-1}{4X+1} dX$

8- $\int \sin^3 X\ dX$

9- $\int \frac{1}{X\sqrt{1+\ln X}} dX$

10- $\int \sin^2 X \cos^2 X\ dX$

11- $\int \frac{1}{(X^2+5)^{\frac{3}{2}}} dX$

12- $\int X^3 \ln X\ dX$

13- $\int \tan^{-1} X\ dX$

14- $\int \frac{X}{(3+X^2)^{\frac{1}{3}}} dX$

15- $\int \frac{dX}{(1-X^2)^{\frac{1}{2}}}$

16- $\int \frac{dX}{2+\sin X}$

الإجابة

1 - $u = X^2 + 5$

$du = 2X\ dX$

$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}} du$

$= \frac{1}{2} u^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{1}{2}(X^2 + 5)^{\frac{4}{3}} + c$

2 - $\int 10^{2X} dX = \frac{10^{2X}}{2\ln 10} + c$

3 - $I = \int \sin 4X \cdot \cos 3X\ dX$

$= \frac{1}{2}\int (\sin X + \sin 7X) dX$

$= -\frac{1}{2}(\cos X + \frac{1}{7}\cos 7X) + c$

4 - $I = \int \frac{\cos X}{1 + \sin X} dX$

بفرض أن :

$u = 1 + \sin X$

$du = \cos X\ dX$

$I = \int \frac{du}{u} = \ln u + c$

$= \ln|1 + \sin X| + c$

5 - $I = \int \frac{1}{X \ln X} dX \longrightarrow u = \ln X$ بفرض أن:

$du = \frac{1}{X} dX$

$= \int \frac{du}{u}$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|\ln X| + c$

$$u = \cot X$$

$$du = -\csc^2 X \; dX$$

$$\therefore \quad I = -\int u.du + \int du$$

$$= -\frac{1}{2}u^2 + u + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cot^2 X + \cot X + c$$

7 – $$I = \int \frac{2X-1}{4X+1} \, dX$$

$$= \int \frac{2X}{4X+1} \, dX - \frac{1}{4X+1} \, dX$$

$$= \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2(4X+1)}) dX - \int \frac{1}{4X+1} \, dX$$

$$= \frac{X}{2} - \frac{1}{2(4)} \ln|4X+1| - \frac{1}{4}\ln|4X+1| + c$$

$$= \frac{X}{2} - \frac{3}{8}\ln|4X+1| + c$$

8 – $$I = \int \sin^3 X \; dX$$

$$= \int \sin^2 X . \sin X \; dX$$

$$= \int (1 - \cos^2 X) \sin X \; dX$$

$$= \int \sin X \; dX - \int \cos^2 X \; d\cos X$$

$$= -\cos X + \int \cos^2 X \, d\cos X$$

$$= -\cos X + \frac{1}{3}\cos^3 X + c$$

9 – $$I = \int \frac{1}{X\sqrt{1+\ln X}} \, dX$$

نفرض ان:

$$u = 1 + \ln X$$

$$du = \frac{1}{X} dX$$

$$\therefore \quad I = \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1 + \ln X} + c$$

10 – $$I = \int \sin^2 X \cos^2 X \, dX$$

$$= \int (\frac{1}{2} \sin 2X)^2 dX$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2X \, dX$$

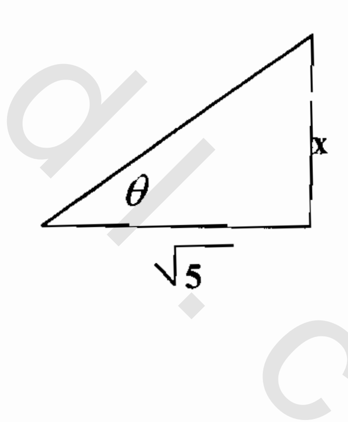
$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4X) dX$$

$$= \frac{1}{8} [X - \frac{1}{4} \sin 4X] + c$$

11 – $$I = \int \frac{1}{(X^2 + 5)^{\frac{3}{2}}} dX$$

$$X = \sqrt{5} \tan \theta$$

$$dX = \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$$



$$\therefore \quad I = \int \frac{\sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta}{5 \sec^2 \theta \cdot \sqrt{5} \sec \theta}$$

$$= \frac{1}{5} \int \cos \theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{5} \sin \theta + c$$

$$= \frac{1}{5} \frac{X}{\sqrt{X^2 + 5}} + c$$

12 – $$I = \int X^3 \cdot \ln X \, dX$$

نفرض ان:

$$u = \ln X \qquad du = \frac{1}{X} dX$$

$$v = \frac{1}{4} X^4 \qquad dv = X^3$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{4} X^4 \ln X - \int \frac{1}{4} X^4 \cdot \frac{1}{X} \, dX$$

$$= \frac{X^4}{4} \ln X - \frac{1}{4} \frac{X^4}{4} + c$$

$$= \frac{X^4}{4} (\ln X - \frac{1}{4}) + c$$

$$13 - \quad I = \int \tan^{-1} X \, dX$$

بفرض :

$$u = \tan^{-1} X \qquad du = \frac{1}{1 + X^2} dX$$

$$v = X \qquad dv = dX$$

$$\therefore \quad I = X \tan^{-1} X - \int \frac{X}{1 + X^2} dX$$

$$= X \tan^{-1} X - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + X^2 \right| + c$$

$$14 - \quad I = \int \frac{X}{(3 + X^2)^{\frac{1}{3}}} dX$$

بفرض أن :

$$u = 3 + X^2$$

$$du = 2X \, dX$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{3}} du$$

$$= \frac{3}{4} u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4} (3 + X^2)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$15 - \quad I = \int \frac{dX}{(1 - X^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$X = \sin \theta$$
$$dX = \cos \theta \, d\theta$$
$$I = \int \frac{\cos \theta \, d\theta}{(1 - \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \int d\theta$$
$$= \theta + c$$
$$= \sin^{-1} X + c$$

16 - $$I = \int \frac{dX}{2 + \sin X}$$

باستخدام التعويض: $Z = \tan \dfrac{X}{2}$

$$\therefore \quad \sin X = \frac{2Z}{1 + Z^2}$$
$$\cos X = \frac{1 - Z^2}{1 + Z^2}$$
$$X = 2 \tan^{-1} Z$$
$$dX = \frac{2\,dZ}{1 + Z^2}$$

$$\therefore \int \frac{dX}{2 + \sin X} = \int \frac{1 + Z^2}{2 + 2Z + 2Z^2} \cdot \frac{2\,dZ}{1 + Z^2}$$
$$= \int \frac{dZ}{(Z + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

بفرض أن :

$$u = Z + \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \quad I = \int \frac{du}{u^2 + a^2}$$
$$= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2Z + 1}{\sqrt{3}} + c$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2 \tan \frac{X}{2} + 1}{\sqrt{3}} + c$$

نماذج اختبارات في التكاملات وحلولها



نموذج اختبار رقم (1)

I- أوجد التكاملات التالية (باستخدام طرق التكامل):-

$1- \quad \int e^{X} \cos 2X \, dX$

$2- \quad \int \frac{X^2+3X-2}{(X-1)(X^2+1)} dX$

$3- \quad \int X^2 e^{-X} dX$

II- أيوجد التكاملات التالية: -

$1- \quad \int e^{X}(1+\cos e^{X}) dX$

$2- \quad \int \frac{1-\sin X}{X+\cos X} dX$

$3- \quad \int \frac{(X-2)}{(X^2-4X+3)^3} dX$

$4- \quad \int \frac{1}{\sqrt{X}(\sqrt{X}+1)^3} dX$

$5- \quad \int (1+\frac{1}{X})^2 \frac{1}{X^2} dX$

إجابة نموذج اختبار رقم (1)

$I-1- \qquad I = \int e^{X} \cos 2X \, dX$

$u = e^{X} \qquad\qquad du = e^{X} dX$

$v = \frac{1}{2}\sin 2X \qquad\qquad dv = \cos 2X \, dX$

$$I = \frac{1}{2} e^{X} \sin 2X - \frac{1}{2}\int e^{X} \sin 2X \, dX$$

$u = e^X \qquad\qquad du = e^X dX$

$v = -\frac{1}{2}\cos 2X \qquad\qquad dv = \sin 2X\ dX$

$$\int e^X \sin 2X\ dX = -\frac{1}{2}e^X \cos 2X + \frac{1}{2}\int e^X \cos 2X\ dX$$

$$\therefore \qquad I = \frac{1}{2}e^X \sin 2X - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^X \cos 2X + \frac{1}{2}I\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^X \sin 2X + \frac{1}{4}e^X \cos 2X - \frac{1}{4}I$$

$$\frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^X \sin 2X + \frac{1}{4}e^X \cos 2X$$

$$\therefore \qquad I = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^X \sin 2X + \frac{1}{4}e^X \cos 2X\right) + c$$

$$2- \qquad I = \int \frac{X^2 + 3X - 2}{(X-1)(X^2+1)} dX$$

$$\frac{X^2 + 3X - 2}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{A}{X-1} + \frac{BX + C}{X^2 + 1}$$

$$X^2 + 3X - 2 = A(X^2+1) + (BX + C)(X-1)$$

$$= (A+B)X^2 + (C-B)X - C + A$$

بمساواة معاملات قوى x المختلفة:

$1 = A + B$...............(1)

$3 = C - B$...............(2)

$-2 = A - C$...............(3)

بجمع (2) + (3)

$\therefore 1 = A - B$............(4)

بجمع (4) + (1)

$2=2A$

$\therefore A=1$

$B=1-A=1-1=0$

$C=3+B=3+0=$

$$\therefore \quad I=\int \frac{1}{X-1}dX+\int \frac{3}{X^2+1}dX$$

$$=\ln|X-1|+3\tan^{-1}X+c$$

3- $I=\int X^2e^{-X}dX$

$u=X^2$ $\qquad du=2X\,dX$

$v=-e^{-X}$ $\qquad dv=e^{-X}dX$

$$I=-X^2e^{-X}+2\int Xe^{-X}dX$$

$u=X^2$ $\qquad du=2X\,dX$

$v=-e^{-X}$ $\qquad dv=e^{-X}dX$

$$\therefore \int Xe^{-X}=-Xe^{-X}+\int e^{-X}dX$$

$$=-Xe^{-X}-e^{-X}+c$$

$$\therefore \quad I=-X^2e^{-X}+2(-Xe^{-X}-e^{-X})+c$$

$$=-X^2e^{-X}-2Xe^{-X}-2e^{-X}+c$$

II -1- $\quad I=\int e^X(1+\cos e^X)dX$

$$=\int e^X dX+\int e^X\cos e^X dX$$

$$=e^X+\sin e^X+c$$

2 - $\quad I=\int \frac{1-\sin X}{X+\cos X}dX$

$2=2A$

$\therefore A=1$

$B=1-A=1-1=0$

$C=3+B=3+0=$

$$\therefore \quad I=\int\frac{1}{X-1}dX+\int\frac{3}{X^2+1}dX$$

$$=\ln|X-1|+3\tan^{-1}X+c$$

3- $I=\int X^2e^{-X}dX$

$u=X^2 \qquad du=2X\,dX$

$v=-e^{-X} \qquad dv=e^{-X}dX$

$$I=-X^2e^{-X}+2\int Xe^{-X}dX$$

$u=X^2 \qquad du=2X\,dX$

$v=-e^{-X} \qquad dv=e^{-X}dX$

$$\therefore\int Xe^{-X}=-Xe^{-X}+\int e^{-X}dX$$

$$=-Xe^{-X}-e^{-X}+c$$

$$\therefore \quad I=-X^2e^{-X}+2(-Xe^{-X}-e^{-X})+c$$

$$=-X^2e^{-X}-2Xe^{-X}-2e^{-X}+c$$

II -1- $I=\int e^X(1+\cos e^X)dX$

$$=\int e^XdX+\int e^X\cos e^XdX$$

$$=e^X+\sin e^X+c$$

2 - $I=\int\frac{1-\sin X}{X+\cos X}dX$

بفــرض:

$$u = X + \cos X$$

$$du = (1 - \sin X)dX$$

$$I = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + c$$

$$= \ln|X + \cos X| + c$$

$$3- \qquad I = \int \frac{X-2}{(X^2 - 4X + 3)^3} dX$$

بفــــرض:

$$u = X^2 - 4X + 3$$

$$du = (2X - 4)dX = 2(X-2)dX$$

$$I = \int \frac{1}{(u)^3} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + c = -\frac{1}{4}\frac{1}{u^2} + c$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{(X^2 - 4X + 3)^2} + c$$

$$4- \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{X}(\sqrt{X}+1)^3} d$$

بفـــرض:

$$u = \sqrt{X} + 1$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{X}} dX$$

$$2du = \frac{1}{\sqrt{X}} dX$$

$$\therefore \quad I = 2\int \frac{1}{u^3} du$$

$$= 2\frac{u^{-2}}{-2} + c$$

$$= -\frac{1}{u^2} + c$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt{X}+1)^2} + c$$

$$5- \quad I = \int (1 + \frac{1}{X})^2 \frac{1}{X^2} dX$$

بفرض:

$$u = 1 + \frac{1}{X}$$

$$du = -\frac{1}{X^2} dX$$

$$-du = \frac{dX}{X^2}$$

$$\therefore I = -\int u^2 du$$

$$= -\frac{1}{3}u^3 + c$$

$$= -\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{X})^3 + c$$

نموذج اختبار رقم (2)

أوجد التكاملات الآتية:-

1- $\int \tan X \sec^2 X \, dX$

2- $\int X e^{-X^2} dX$

3- $\int \frac{\ln(X+1)}{X+1} dX$

4- $\int \frac{X}{\sqrt{9-X^2}} dX$

5- $\int \frac{X^2}{\sqrt{4-X^2}} dX$

6- $\int \frac{1}{4+25X^2} dX$

7- $\int \ln X \, dX$

إجابة نموذج اختبار رقم (2)

1- $I = \int \tan X \sec^2 X \, d$

بفرض:

$$u = \tan X$$

$$du = \sec^2 X \, dX$$

$$\therefore \quad I = \int u \, du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + c$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 X + c$$

2- $I = \int X e^{-X^2} dX$

بفرض:

$$u = e^{-X^2}$$

$$du = -2Xe^{-X^2}\,dX$$

$$\frac{du}{-2} = Xe^{-X^2}$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{du}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}u + c$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-X^2} + c$$

$$3- \quad I = \int \frac{\ln(X+1)}{(X+1)}dX$$

بفرض

$$u = \ln(X+1)$$

$$du = \frac{1}{X+1}dX$$

$$\therefore \quad I = \int u\,du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + c$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(X+1))^2 + c$$

$$4- \quad I = \int \frac{X}{\sqrt{9-X^2}}dX$$

بفرض

$$u = 9 - X^2$$
$$du = -2X \, dX$$
$$\frac{du}{-2} = X \, dX$$
$$I = \int \frac{du}{-2\sqrt{u}}$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= -\sqrt{9 - X^2} + c$$

$$5 - \quad I = \int \frac{X^2}{\sqrt{4 - X^2}} dX$$

بفرض

$$X = 2\sin\theta$$
$$dX = 2\cos\theta \, d\theta$$
$$\therefore I = \int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4 - 4\sin^2\theta}} 2\cos\theta \, d\theta$$
$$= 4\int \sin^2\theta \, d\theta$$
$$= 4\int \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) d\theta$$
$$= 4(\frac{1}{2})(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta) + c$$
$$= 2(\sin^{-1}\frac{X}{2} - \sin\theta\cos\theta) + c$$
$$= 2(\sin^{-1}\frac{X}{2} - \frac{X\sqrt{4 - X^2}}{2}) + c$$

$$6 - I = \int \frac{1}{4 + 25X^2}$$

بفرض:

$$u = \frac{5X}{2}$$

$$du = \frac{5}{2} dX$$

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + (\frac{5X}{2})^2} dX$$

$$= \frac{1}{4} (\frac{2}{5}) \int \frac{1}{1 + u^2} du$$

$$= \frac{1}{10} \tan^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{10} \tan^{-1} (\frac{5X}{2}) + c$$

7 - $I = \int \ln X \; dX$

بفرض:

$$u = \ln X \rightarrow du = \frac{dX}{X}$$

$$v = X \leftarrow dv = dX$$

$$I = X \ln X - \int X (\frac{1}{X}) dX$$

$$= X \ln X - X + c$$

تمـــــرينـــات عـــامة

فــــي

التكـــــامــــلات



تمرين رقم (1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \tan^{-1} X \; dX$

2- $\int e^{X} \sin X \; dX$

3- $\int \sqrt{a^2 - X^2} dX$ $\qquad a > X$

4- $\int \tan X \; dX$

5- $\int \csc u \; du$

6- $\int \frac{2X+1}{X^2-4} dX$

7- $\int \frac{\sqrt{25-X^2}}{X} dX$

8- $\int X^2 e^{3X} dX$

9- $\int X (3)^{-X^2} dX$

10- $\int X \tan X^2 \; dX$

11- $\int \frac{X \; dX}{e^{X^2+9}} dX$

12- $\int \sec^2 e^{2\tan X} dX$

13- $\int \sin 2X \tan 2X \; dX$

تمرين رقم (2)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \sin^{-1} X \, dX$

2- $\int X \sin X \, dX$

3- $\int X^2 e^X dX$

4- $\int \sec X (\sec X + \tan X) dX$

5- $\int \cot u \, du$

6- $\int \frac{X}{\sqrt{1 - X^2}} dX$

7- $\int \frac{X^2}{\sqrt{X^2 - 16}} dX$

8- $\int \frac{3X + 5}{(X + 1)(X - 1)^2} dX$

9- $\int \frac{1}{X \log X} dX$

10- $\int \frac{\cos X}{2 - \cos^2 X} dX$

11- $\int X e^{X^2 + 2} dX$

12- $\int \frac{X - \sin 2X}{2X^2 + \cos 2X} dX$

13- $\int e^X \cos X \, dX$

تمرين رقم (3)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

1 − $\int \frac{dX}{1+\cos X}$

(الجواب: $Y = \cot X + \csc X + c$)

2 − $\int \csc X \; dX$

(الجواب: $Y = \ln\left|\tan\frac{1}{2}X\right|$)

3 − $\int \frac{X \; dX}{X^4 + 3}$

(الجواب: $Y = \tan^{-1}\frac{X^2}{\sqrt{3}} + c$)

4 − $\int \frac{dX}{e^X + e^{-X}}$

(الجواب: $Y = \frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1} e^X + c$)

5 − $\int \frac{dX}{X^2 + 10X + 30}$

(الجواب: $Y = \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{X+5}{\sqrt{5}} + c$)

6 − $\int \frac{dX}{\sqrt{20 + 8X - X^2}}$

(الجواب: $Y = \sin^{-1}\frac{X-4}{6} + c$)

7 − $\int \frac{dX}{X^2 - 4X + 8}$

(الجواب: $Y = \frac{1}{2}\ln\left|X^2 - 4X + 8\right| + \frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{X-2}{2} + c$)

8 − $\int \frac{dX}{\sqrt{28 - 12X - X^2}}$

(الجواب: $Y=\sin^{-1}\frac{X+6}{8}+$)

9– $\int\frac{X+2}{\sqrt{4X-X^2}}dX$

(الجواب: $Y=-\sqrt{4X-X^2}+4\sin^{-1}\frac{X-2}{2}+$)

10– $\int\frac{X+1}{X^2+2X-3}dX$

11– $\int(\sin X)e^{\cos X}dX$

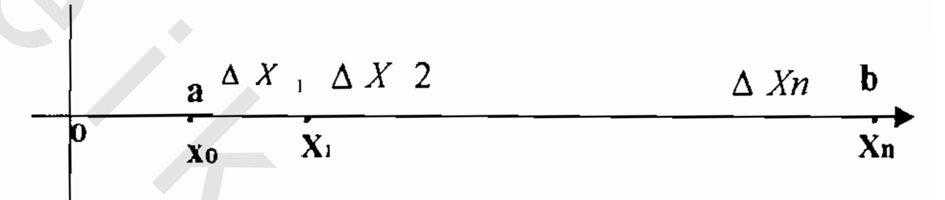
12– $\int\frac{dX}{e^{4X}}$

13– $\int\frac{\sin\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}d\theta$

التكامل المحدد

التكامل المحدد:

إذا كانت الدالة f(X) متصلة في الفترة $a \le X \le b$. تقسم هذه الفترة إلى n فترة جزئية بواسطة النقاط $X_0, X_1, X_2 ...... X_r, X_n$. كما هو موضح شكل 35



شكل (35)

ويرمز بطول الفترة الجزئية ΔX حيث:

نفرض أن مجموع حواصل ضرب كل من الفترات ΔX_r في قيمة الدالة عند X_r ويرمز له بالرمز $\sum$ قيمته S_n أي ان:-

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} f(X_r)\Delta X_r = f(X_1)\Delta X_1 + f(X_2)\Delta X_2 + ... + f(X_n)\Delta X_n$$

نجعل عدد الفترات الجزئية يزداد إلى مالا نهاية أي ان ΔX_r تقترب من الصفر.

نجد ان نهاية المجموع تصل إلى نهاية مجموع متسلسلة:

$$S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f(X_r).\Delta X_r$$

فإذا كان لهذه النهاية وجود أي تساوي عددا معينا مهما اختلفت طريقة تقسيم الفترة المغلقة $[a,b]$ فان:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f(X_r).(\Delta X_r) = \int_a^b f(X).(\Delta X)$$

حيث $\int_a^b f(X).(\Delta X)$ يسمى بالتكامل المحدد للدالة f(X) وتقرا التكامل المحدد لـــ f(X) بالنسبة لX من X=a إلى X=b وتسمى الدالة f(X) دالة التكامل وتسمى b ,a على الترتيب الحد الادنى والحد الاعلى للتكامل.

خواص التكامل المحدد:

اذا كانت الدالة $g(X), f(X)$ دالتين متصلتين في الفترة [a,b] فان:

$$1-\quad \int_a^a f(X).dX = 0$$

$$2-\quad \int_a^b f(X).dX = -\int_b^a f(X).dX$$

$$3-\quad \int_a^b cf(X).dX = c\int_a^b f(X).dX$$

$$4-\quad \int_a^b (f(X) \pm g(X))dX = \int_a^b f(X).dX \pm \int_a^b g(X).dX$$

$$5-\quad \int_a^b f(X).dX = \int_a^c f(X).dX + \int_c^b f(X).dX$$

حيث c ثابت : $b > c > a$

النظرية الأساسية في حساب التكامل:

اذا كانت f(X) دالة متصلة في الفترة [a,b] وكانت F(X) تكاملا غير محدود ل f(X) فان:-

$$\int_a^b f(X).dX = F(X)]_a^b = F(b) - F(a)$$

وسوف نكتفي هنا بحل مسائل التكامل المحدد باستخدام النظرية الاساسية في حساب التكامل.

مثال 1:

اوجد قيمة : $\int_{-1}^{1}(2X^2 - X^3)dX$

الحل:

$$\int_{-1}^{1}(2X^2 - X^3)dX = [\frac{2X^3}{3} - \frac{X^4}{4}]_{-1}^{1}$$

$$= [\frac{2}{3} - \frac{1}{4}] - [-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}] = \frac{4}{3}$$

مثال 2:

اوجد قيمة : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{4}} \sin X \, dX$

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{4}} \sin X \, dX = -\cos X]_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{4}}$$

$$= [-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0] = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

مثال 3:

أوجد قيمة: $\int_{1}^{e} \ln X \, dX$

الحل:

$$\int_{1}^{e} \ln X \, dX = [X \ln X - X]_{1}^{e}$$

$$= [e \ln e - e] - [\ln 1 - 1]$$

$$= [e - e] - [0 - 1]$$

$$= 1$$

تمــــاريـــــن 7

أوجد التكاملات الآتية باستخدام النظرية الأساسية في حساب التكامل:

1- $\int_{1}^{5} X^2 \, dX$

2- $\int_{0}^{[illegible]} X^2 \, dX$

3- $\int_{0}^{4} (3X^2 + 2X - 1) dX$

4- $\int_{1}^{5} X^3 \, dX$

5- $\int_{1}^{3} X^2 \, dX$

6- $\int_{2}^{4} (X^3 + X) dX$

7- $\int_{0}^{1} (1 - X)^2 dX$

8- $\int_{1}^{2} (X - 1)(2 - X) dX$

9- $\int_{1} (X^2 + \frac{1}{X^2}) dX$

10- $\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^3}) dX$

11- $\int_{-6}^{-10} \frac{dX}{X + 2}$

12- $\int_{-2}^{2} \frac{dX}{X^2 + 4}$

13- $\int_{-5}^{-3} \sqrt{X^2 - 4} \, dX$

14- $\int_{4}^{5} \frac{X \, dX}{\sqrt{X^2 - 15}}$

15- $\int_{2}^{1} \frac{dX}{25 - X^2}$

16- $\int^{2\pi} \sin\frac{1}{2} X \, dX$

17- $\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{16 - X^2}}{X}$

18- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dX}{3 + \cos 2X}$

تطبيقات على استخدام التكامل

1 - حساب المساحات

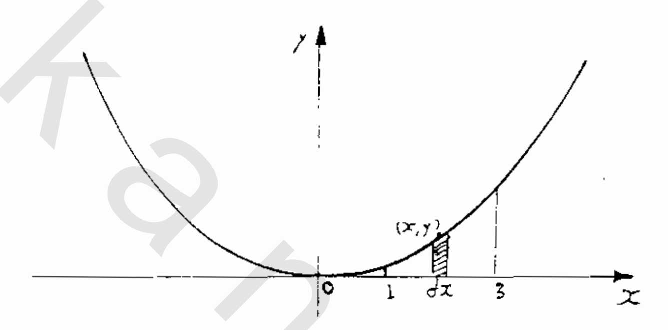
مثال 1:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $Y = X^2$ والمحور X والمستقيمين X=1,X=3

الحل:

باخذ عنصر مساحة ΔA الممثل بالمستطيل لبمقرب والذي يظهر بالرسم مهشرا (شكل 36).

$$\Delta A = Y\Delta X$$



شكل 36

وعندما يصل عدد عناصر المساحة إلى عدد لانهائي فان مجموع هذه المساحات تساوي المساحة المطلوبة A حيث:

$$A = \int_1^3 Y.dX$$

$$= \int_1^3 X^2.dX$$

$$= \frac{1}{3}[X^3]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}[3^3 - 1^3] = \frac{26}{3} \quad \text{وحدةمساحة}$$

مثال 2:

أوجد المساحة الواقعة فوق المحور X وتحت المنحنى $Y = 4X - X^2$

الحل:

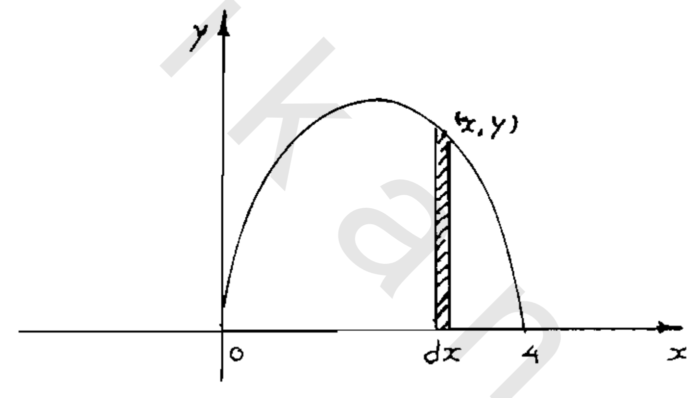
لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحور X نضع Y=0:

$$\therefore 4X - X^2 = 0$$

$$X(4 - X) = 0$$

$$\therefore \quad X = 0 \quad , \quad X = 4$$

باخذ عنصر مساحة ΔA والمهشر بالرسم. شكل 37



شكل 37

$$\therefore \Delta A = Y \Delta X$$

$$A = \int_0^4 Y \, dX$$

$$= \int_0^4 (4X - X^2) dX$$

$$= [2X^2 - \frac{1}{3} X^3]_0^4$$

$$= [2(16) - \frac{1}{3}(64)]$$

$$= \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}$$ وحدتمساحة

مثال 3:

أوجد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $X = 8 + 2Y - Y^2$ والمحور Y والمستقيمان Y=-1,Y=3 (شكل 38)

الحل:

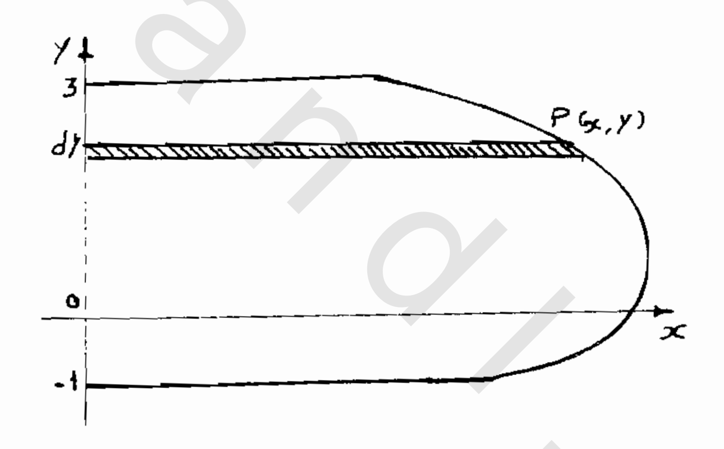
القطع المكافئ المذكور يوضحه الشكل (38) حيث محوره يوازي المحور X لإيجاد تقاطع القطع مع المحور Y نضع X=0 :

$$\therefore 8 + 2Y - Y^2 = 0$$

$$(2 + Y)(4 - Y) = 0$$

$$Y = -2 \quad , \quad Y = 4$$

باخذ عنصر مساحة ΔA الممثل بالمستطيل المقرب المهشر بالرسم:



شكل (38)

$$\therefore \Delta A = X\ \Delta Y$$

$$\therefore \int = \int_{-1}^{3}(8+2Y-Y^2)dY$$

$$= [8Y + Y^2 - \frac{1}{3}Y^3]_{-1}^{3}$$

$$= [(8(3)+(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3) - (8(-1)+(-1)^2 - \frac{1}{3}(-1)^3)]$$

$$= \frac{92}{3}$$ وحدةمساحة

مثال 4:

أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $Y = X^2 - 7X + 6$ والمحور X والمستقيمين X=6 , X=2

(شكل 39)

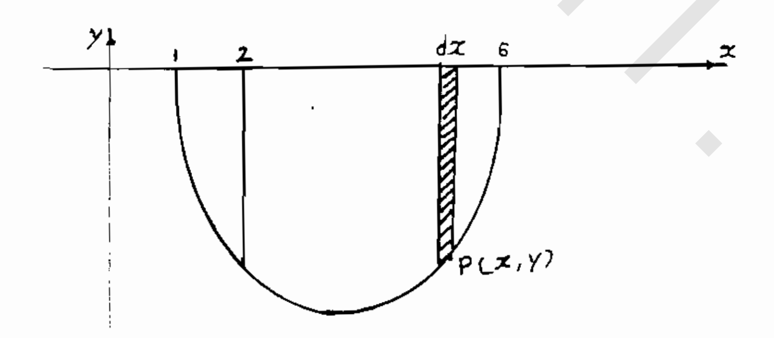
الحل:

لايجاد تقاطع القطع مع المحور X نضع Y=0:

$$\therefore X^2 - 7X + 6 = 0$$

$$(X-6)(X-1) = 0$$

$$\therefore X = 6 \quad , \quad X = 1$$



شكل 39

نأخذ عنصر مساحة ΔA المهشر بالرسم :

$$\Delta A = Y.\Delta X$$

$$\therefore A = \int Y.dX$$

$$= \int_{2}^{6} (X^2 - 7X + 6) dX$$

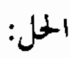
$$= [\frac{1}{3}X^3 - \frac{7}{2}X^2 + 6X]_2^6$$

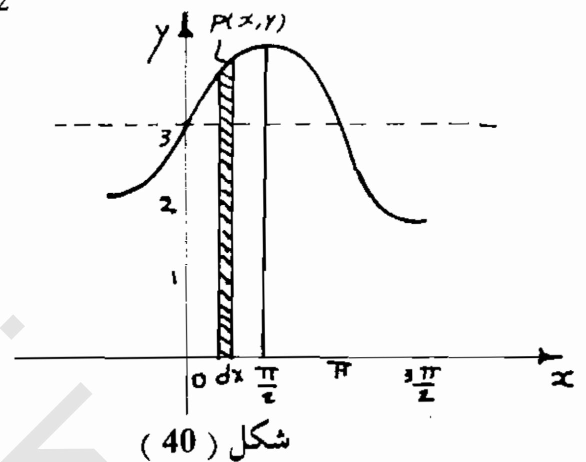
$$= [(\frac{1}{3}(6)^3 - \frac{7}{2}(6)^2 + 6(6)) - (\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{7}{2}(2)^2 + 6(2))$$

$$= \frac{56}{3} \text{وحدةمساحة}$$

مثال 5:

أوجد المساحة تحت المنحنى : $Y = 3 + 2\sin X$, $X[0, \frac{\pi}{2}]$ شكل (40)


الحل:



شكل (40)

نحسب مساحة عنصر المساحة ΔA من المستطيل المهشر بالرسم:

$$\Delta A = Y.\Delta X$$

$$\therefore A = \int Y.dX$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + 2\sin X)dX$$

$$= [3X - 2\cos X]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [(3(\frac{\pi}{2}) - 2\cos\frac{\pi}{2}) - (3(0) - 2\cos 0)]$$

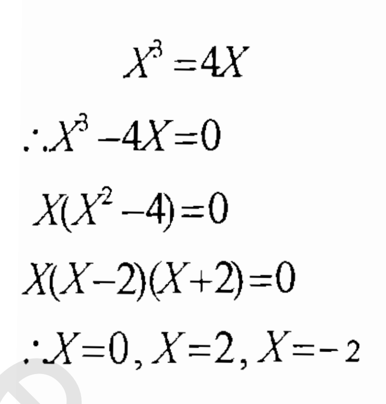
$$= \frac{3\pi}{2} + 2$$

مثال 6 :

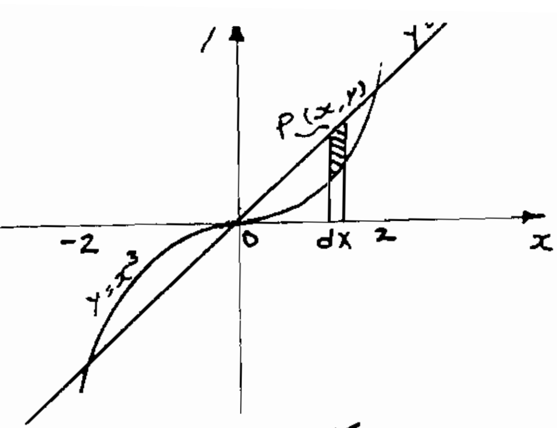
أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين: $Y = 4X$, $Y = X^3$

الحل:

نوجد نقط التقاطع بينهما (شكل 41):



$$X^3 = 4X$$
$$\therefore X^3 - 4X = 0$$
$$X(X^2 - 4) = 0$$
$$X(X-2)(X+2) = 0$$
$$\therefore X = 0,\ X = 2,\ X = -2$$



شكل 41

نلاحظ أن المنحنيين دوال فردية متماثلة حول نقطة الاصل. بأخذ عنصر مساحة dA كما بالرسم الممثل بالمساحة التي على شكل مستطيل = $(dA_1) YdX$

$$\therefore dA_1 = \int Y.dX = \int 4X.dX$$

باخذ عنصر المساحة dA_2 والممثل بالمساحة تحت المنحني $Y = X^3$

$$dA_2 = \int Y.dX = \int X^3.dX$$

$\therefore$ عنصر المساحة المطلوب (المظلل) dA :

$$dA = dA_1 - dA_2$$

$$A = \int_0^2 4X.dX - \int_0^2 X^3.dX$$

$$= 4\left[\frac{X^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{X^4}{4}\right]_0^2 = 2(4) - 4 = 4$$ وحدةمساحة

والمساحة المطلوبة A_t تساوي ضعف المساحة A من التماثل:

$$A_t = 2(4) = 8$$ وحدةمساحة

تمــــاريـــــن 8

1 – أوجد المساحة الواقعة على المحور x والمنحنى:

(a) $Y = \sqrt{X+1}$

بين X=8 , X=3

(b) $Y = 2 - \frac{1}{2}X^3$

بين X=1 , X=-2

2 –أوجد المساحة المحصورة بين:

(a) $Y = X \, , \, Y = X^3$

(b) $Y = 4X \, , \, Y = X^3$

(c) $Y^2 = 4X \, , \, X^2 = 4Y$

(d) $Y = X^4 - 8X^2 + 16 \, , \, X$ المحور

(e) $Y = +2 \, , \, Y = X^2 - 1 \, , \, Y$ المحور

(f) $X = 4 \, , \, Y^2 = X^3$

$Y = \frac{1}{(2X-1)^2} \, , \, X = -1 \, , \, X = 1$

3- أوجد المساحة المحصورة بين X=0 ,X=-9 وكل من:

(a) $Y = X - X^3$

(b) $Y = X^3 - X^2 - 2X$

(c) $Y = \frac{1}{1-X}$

باستخدام التكامل أوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$A(0,0) \quad , \quad B(7,0) \quad , \quad C(3,4)$

4- أوجد قيمة احدى المساحات المحصورة بين المنحنيين:–

$Y = \sin X \quad , \quad Y = \cos X$

5 –أوجد المساحة المحصورة بين:

(a) $Y = X^2 - 4X + 3$

ونقطة تقاطعه مع المحور X

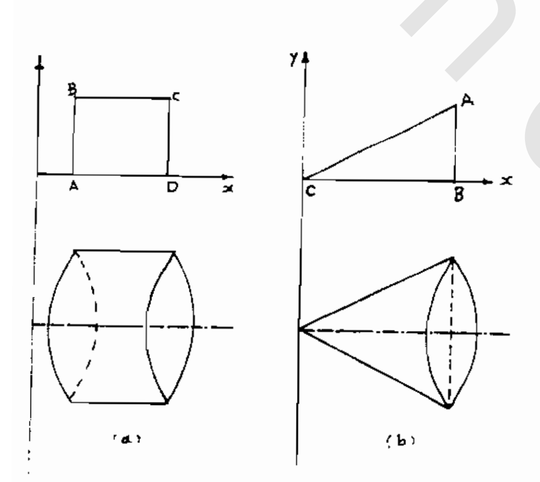
(b) $Y = 2\tan^2 X \quad , \quad Y = \sec^2 X$

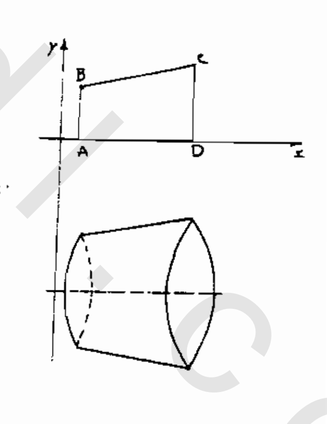
(c) $Y = X^2 - 4 \quad , \quad Y = 4 - X^2$

(d) $Y = X \quad , \quad Y = X^2$

2 حساب حجوم الأجسام الدورانية

نرى في الشكل (42-a) اذا دار المستطيل ABCD حول المحور X دورة كاملة فان الشكل الناتج من الدوران يكون اسطوانة. واذا دار المثلث ABC حول المحور X دورة كاملة فان الشكل الناتج من الدوران يكون مخروطا (42-b) . واذا دار شبه المنحرف ABCD حول المحور X فان الشكل الناتج من الدوران يكون مخروط دائري قائم ناقص شكل (42-c).





شكل (42)

مما سبق يتضح أن الجسم الدوراني ينشا من دوران مساحة حول مستقيم ثابت يسمى محور الدورات .

إيجاد حجم الجسم الدوراني:

1 - طريقة القرص:-

يكون محور الدوران جزا من حدود السطح. يتم رسم شريحة (قطعة من السطح) عمودية على محور الدوران. ويحسب الحجم الناتج من دورانها.

عندما يزداد اعداد هذه الشريحة الى عدد لانهائي يتم استخدام النظرية الاساسية في حساب التكامل و التي سبق استخدامها في ايجاد المساحة.

مثال 1:

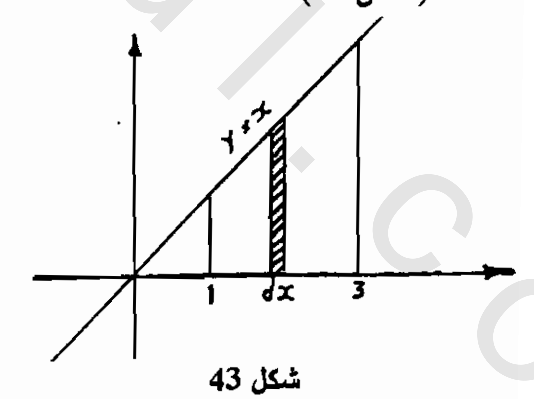
اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة M والمحددة بالمنحنى Y=X والمحور X والمستقيمين

X=3 , X=1

الحل:

يتم رسم شريحة (قطعة من السطح) عمودية على محور الدوران يكون حجمها ΔV .(شكل 43):

$$\therefore \quad \Delta V = A.\Delta X$$
$$= \pi Y^2.\Delta X$$
$$\sum \Delta V = \sum \pi Y^2.\Delta X$$
$$V = \int_1^3 \pi Y^2.dX = \int_1^3 \pi X^2.dX$$



شكل 43

$$= \frac{\pi}{3}[X^3]_1^3$$

$$= \frac{\pi}{3}[3^3 - 1]$$

$$= \frac{26}{3}\pi$$

مثال 2 :

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة M المحددة بالمنحنى Y=sinX والمحور X وX=0 و $X = \pi$. شكل 44

$$V = \int_0^{\pi} \pi Y^2 .dX$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 X.dX$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2X)dX$$

$$= \frac{\pi}{2}[\int_0^{\pi} dX - \int_0^{\pi} \cos 2X.dX]$$

$$= \frac{\pi}{2}[X - \frac{1}{2}\sin 2X]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}[\pi - 0] - [0 - 0]$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$ وحدةحجم

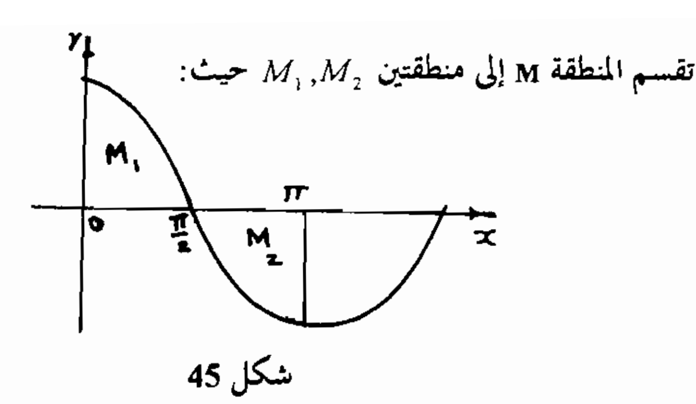
شكل 44

مثال 3:

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدد بالمنحنى Y=cosX والمحور X و $X = 0$, $X = \pi$ حول المحور X (شكل 45)

الحل:

تقسم المنطقة M إلى منطقتين M_1, M_2 حيث:



$M_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$M_2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

شكل 45

ويكون الحجم الكلي V الناشئ من دوران M حول المحور X هو:

$$V = V_1 + V_2$$

حيث V_1 هو حجم الجسم الناشئ من دوران M_1

، V_2 هو حجم الجسم الناشئ من دوران M_2

$$\therefore \quad V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi Y^2 . dX + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi Y^2 . dX$$

ومن خواص التكامل نلاحظ ان:

$$\int_a^b Y.dX = \int_a^c Y.dX + \int_c^b Y.dX$$

$$\therefore \quad V = \int_0^{\pi} \pi Y^2 . dX$$

$$= \int_0^{\pi} \pi \cos^2 X . dX$$

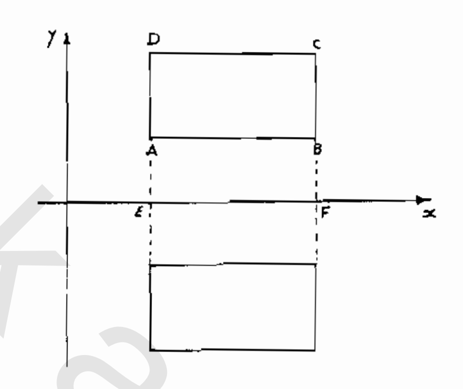
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2X) dX$$

$$= \frac{\pi}{2} [X + \frac{1}{2} \sin 2X]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$ وحدةحجم

2 - عندما لا يكون محور الدوران جزءاً من حدود قطعة السطح:

كما في الشكل (46). حيث مد اضلاع المستطيل لتقطع محور الدوران في F , E وعندما يدور المستطيل حول محور الدوران يتكون شكل حلقي حجمه هو الفرق بين الحجمين المولدين من دوران المستطيل ECDF , EABF حول المحور X . يتم حساب الفرق بين الحجمين بنفس الطريقة السابقة.

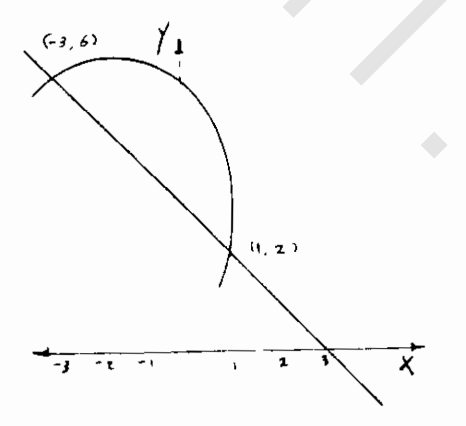


شكل 46

مثال 1: أوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين:

$Y_1 = 6 - 3X - X^2 \ , \ Y_2 = 3 - X$ حول المحور X . شكل 47.

الحل:



شكل 47

لإيجـــاد تقــاطع المنحنييــن يتــم حـــــل المعــــادلتين معـــا:

$$\therefore 6-3X-X^2=3-X$$

$$X^2+2X-3=0$$

$$(X-1)(X+3)=0$$

$$\therefore X_1=1 \quad , \quad X_2=-3$$

$$Y_1=3-1=2$$

$$Y_2=3-(-3)=6$$

$$\therefore V=\int_{-3}^{1}\pi(Y_1^2-Y_2^2).dX$$

$$=\pi\int_{-3}^{1}((6-3X-X^2)^2-(3-X)^2).dX$$

$$=\pi\int_{-3}^{1}((36-36X-3X^2+6X^3+X^4)-(9-6X+X^2)).dX$$

$$=\pi\int_{-3}^{1}(X^4+6X^3-4X^2-30X+27).dX$$

$$=\pi[\frac{X^5}{5}+\frac{6}{4}X^4-\frac{4}{3}X^3-15X^2+27X]_{-3}^{1}$$

$$=\frac{1792}{15}\pi$$ وحدةحجم

مثال 2:

أوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين:

$Y^2=4X$, $X^2=4Y$. **شكل 48**

Y

(4,4)

x

شكل 48

الحل:

لإيجاد نقط التقاطع يتم حل المعادلتين:

$$Y^2 = 4X = (\frac{X^2}{4})^2$$

$$X^4 = 4(16)X$$

$$X^4 - 64X = 0$$

$$X(X^3 - 64) = 0$$

$$X(X-4)(X^2 + 4X + 16) = 0$$

$$\therefore X = 0 \rightarrow Y = 0$$

$$X = 4 \rightarrow Y = 4$$

$\therefore$ نقط التقاطع هما: (0.0) و (4.4).شكل (48)

$$\therefore V = \int_0^4 \pi(Y_2^2 - Y_1^2)dX$$

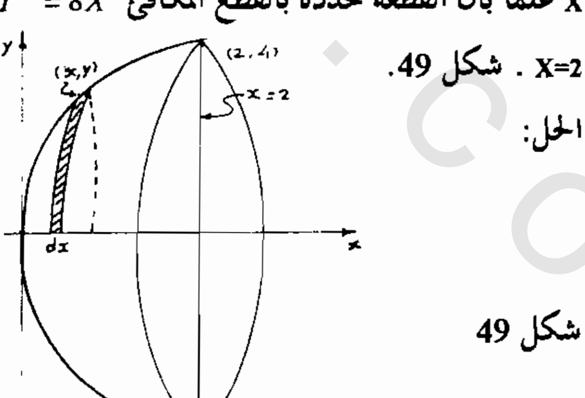
$$= \pi\int_0^4 (4X - \frac{X^4}{16})dX$$

$$= \pi(2X^2 - \frac{X^5}{80})_0^4 = 19.2\,\pi \text{ وحدةحجم}$$

مثال 3:

أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح الواقعة في الربع الأول حول المحور x علما بان القطعة محددة بالقطع المكافئ $Y^2 = 8X$ والوتر البؤري العمودي X=2 . شكل 49.

الحل:



شكل 49

بأخذ عنصر حجمي ΔV حيث

$$\Delta V = A.\Delta X = \pi Y^2.\Delta X$$

وبتجميع هذا العنصر إلى عدد لانهائي ينتج الحجم المطلوب حيث:

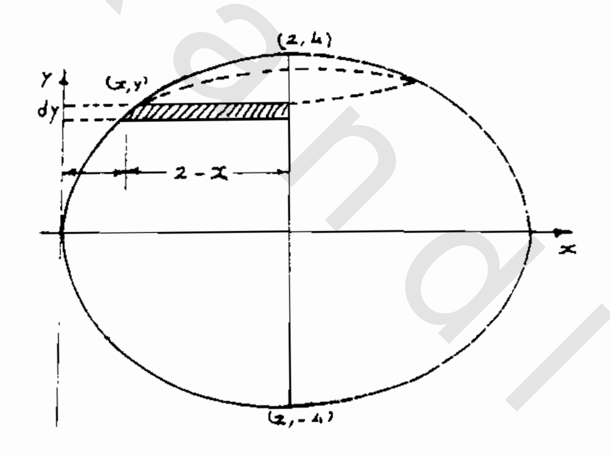
$$V = \sum \pi Y^2.\Delta X$$

$$= \int_0^2 \pi Y^2 dX = \pi \int_0^2 8X.dX = 4\pi[X^2]_0^2 = 16\pi \text{ وحدةحجم}$$

مثال 4:

أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحدد بالقطع المكـــافئ $Y^2 = 8X$ والوتر البؤري العمودي (X=2) حول الوتر البؤري . شكل 50

الحل:



شكل 50

نقسم السطح إلى شرائح افقية صغيرة جدا كما بالشكل(50) وعـــندما يـــدور المستطيل (dY)(2-X) الممثل لاحدى هذه الشرائح ينتج قرص نصف قطـــره (2-X) وارتفاعه dY ويكون حجمه dV :

$$dV = \pi(2-X)^2 dY$$

$$V = \int_{-4}^{4}(4-4X+X^2)dY$$

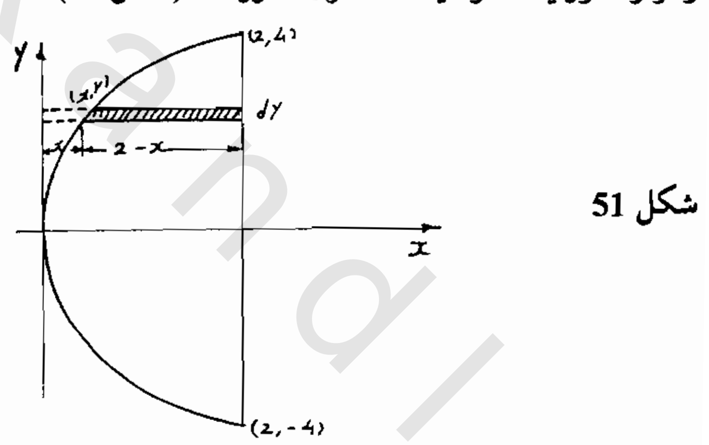
$$= 2\pi\int_{0}^{4}(4-4(\frac{Y^2}{8})+\frac{Y^4}{64})dY$$

$$= 2\pi[4Y - 4\frac{Y^3}{24}+\frac{Y^5}{5(64)}]_0^4$$

$$= 2\pi\frac{4}{15}32 = \frac{256}{15}\pi$$ وحدةحجم

مثال 5:

أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحددة بالقطع المكافئ $Y^2 = 8X$ والوتر البؤري العمودي X=2 حول المحور Y .(شكل 51)



شكل 51

توخذ شريحة على السطح والممثلة بالجزء المهشر في الرسم وعند ادارتها حول المحور Y ينتج قرص حلقي نصف قطره الداخلي X ونصف قطره الخارجي 2 . وعلى ذلك يكون الجزء الناتج من دوران الشريحة من حاصل طرح قرص مفرغ نصف قطره X وحجمه ΔV_2 حيث:

$$\Delta V_2 = \pi X^2 \ \Delta Y$$

من القرص المجسم ΔV_1 والذي نصف قطره 2 حيث:

$$\Delta V_1 = \pi(2)^2.\Delta Y$$

$\Delta V =$ حجم الشريحة المهشرة

$$= \Delta V_1 - \Delta V_2$$

$$V = \int_{-4}^{4} \pi(2)^2 dY - \int_{-4}^{4} \pi X^2 .dY$$

$$= 4\pi \int_{-4}^{4} dY - \pi \int_{-4}^{4} \frac{Y^4}{64} .dY$$

$$= 4\pi[Y - \frac{1}{64}\frac{Y^5}{5}]_{-4}^{4}$$

$$= 8\pi[Y - \frac{1}{64}\frac{Y^5}{5}]_{0}^{4}$$

$= \frac{32}{5}\pi$ وحدةحجم

تمـــــاريـــــــن 9

1 – أوجد الحجم الناشئ من دوران كل من المساحات الاتية حول المحور Y:

$(a)\quad Y=\sqrt{X}\;,\;X=0\;,\;Y=2$

$(b)\quad Y=X^{3}\;,\;Y=0\;,\;X=1$

$(c)\quad Y=0\;,\;Y=2\ln X\;,\;Y=2$

$(d)\quad Y=\sqrt{X}\;,\;Y=X^{3}$

2- أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصـــورة بـــين Y=0 والمنحنيـــين

$$X=8-Y^{2}\quad,\quad X=Y^{2}$$

3- أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين قوس ربع دائرة نصف قطرها r والمماسين له عند احد نهايتيه حول احد المماسين.

4 – أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين المحور X والمنحـــنى $Y^{2}=X^{3}$ والمستقيم X=1:

–حول المحور X

–حول المحور Y

5- أوجد الحجم الدوراني الناشئ من دوران المساحة المحصـــورة بـــين المنحـــنى $Y=1-X^{2}$ والمستقيمين X=1 , Y=1 حول المستقيم X=1

6 –أوجد الحجم الدوراني الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين المنحنيـــين $Y=X^{2}\;,Y=\sqrt{X}$ حول المحور X.



الباب الثالث

المعادلات التفاضلية



المعادلات التفاضلية

تصنف المعادلات التفاضلية وفقا للآتي:-

(أ) النوع : عادية او جزئية

(ب) المرتبة: مرتبة المشتق الاعلى الذي ياتي في المعادلة

(ت) الدرجة : اس اعلى قوة لاعلى رتبة للمشتق وذلك بعد تصفية الكسور و الجذور في المتغير غير المستقل ومشتقاته.

فمثلا........

$$(\frac{d^3Y}{dX^3})^2 + (\frac{d^2Y}{dX^2})^5 + \frac{Y}{X^2+1} = e^X$$

معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثالثة والدرجة الثانية. توجد المشتقات "العادية" فقط عندما يكون المتغير غير المستقل دالة لمتغير مستقل واحد X.

حل المعادلة التفاضلية:

يقال ان $Y=f(X)$ حل للمعادلة التفاضلية اذا كانت مشتقاتها منها تحقق المعادلة التفاضلية.

فمثلا...

$$Y = c_1 \cos X + c_2 \sin X ....(1)$$

(c_1, c_2 ثوابت)

تعتبر حلا للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + Y = 0.......................(2)$$

لان المعادلة رقم (1) ومشتقاتها تحقق المعادلة رقم (2):

$$\frac{dY}{dX} = -c_1 \sin X + c_2 \cos X \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -c_1 \cos X - c_2 \sin X \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وبالتعويض من المعادلتين (1) و (4) في المعادلة (2):

$$\therefore \frac{d^2Y}{dX^2} + Y = -c_1 \cos X - c_2 \sin X + c_1 \cos X + c_2 \sin X$$

$$= 0$$

∴ المعادلة رقم (1) تحقق المعادلة رقم (2).

ومن المالوف ان يكون للمعادلة او المعادلات التفاضلية حلولا تحتوي على ثوابت اختيارية. وسيكون من الضروري ان تخصص قيما لهذه الثوابت الاختيارية وفقا للشروط المعطاة.

ويكون للمعادلة التفاضلية من المرتبة n بصفة عامة حلا يحتوي على n من الثوابت الاختيارية يسمى هذا بالحل العام. ويأتي بعد ذلك تحديد قيم الثوابت (مسالة جبرية) اذا اعطيت شروط ابتدائية.

وسوف نتناول هنا معادلات المرتبة الاولى بطريقة:

(أ) فصل المتغيرات

(ب) المعادلات المتجانسة

(ت) المعادلات الخطية

أ- فصل المتغيرات:

وذلك بتجميع المتغيرات Y مع dY ، X مع dX

مثال 1:

أوجد حل المعادلة الاتية:

$$(X+1)dY = X(Y^2+1)dX$$

الحل:

$$\frac{dY}{Y^2+1}=\frac{X\ dX}{X+1}$$

وبإجراء التكامل للطرفين

$$\tan^{-1}Y=\int\frac{X}{X+1}dX$$
$$=\int(1-\frac{1}{X+1})dX$$
$$=X-\ln(X+1)+c$$

مثال 2:

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$\frac{dY}{dX}=e^{X-Y}$$

الحل

$$\frac{dY}{dX}=\frac{e^X}{e^Y}$$
$$\int e^Y dY=\int e^X dX$$
$$e^Y=e^X+C$$

مثال 3:

أوجد حل المعادلة الآتية:

الحل:

$$\int\frac{\ln X}{X}dX=\int\frac{1}{Y}d$$

بفرض ان:

$$\ln X = u$$

$$\frac{dX}{X} = du$$

$$\therefore \int \frac{\ln X}{X} dX = \int \frac{dY}{Y}$$

$$\int u.du = \ln Y + c$$

$$\frac{1}{2} u^2 = \ln Y + c$$

$$\frac{1}{2} (\ln X)^2 = \ln Y + c$$

ومن المعتاد في بعض المسائل استعمال التعويضات التفاضلية الآتية:-

1- $d(\frac{X}{Y}) = \frac{Y.dX - X.dY}{Y^2}$

2- $d(\frac{Y}{X}) = \frac{X.dY - Y.dX}{X^2} = -(\frac{Y.dX - X.dY}{X^2})$

3- $d\tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = \frac{X.dY - Y.dX}{X^2 + Y^2}$

4- $d\tan^{-1}(\frac{X}{Y}) = \frac{Y.dX - X.dY}{X^2 + Y^2}$

5- $d(XY) = X.dY + Y.dX$

6- $d(\ln\sqrt{X^2 + Y^2}) = \frac{X.dX + Y.dY}{X^2 + Y^2}$

7- $d(X^2 + Y^2) = 2(X.dX + Y.dY)$

مثال: حل المعادلة التفاضلية :

$$X.dY - Y.dX = (X^2 + Y^2)dY$$

الحل:

$$\frac{X.dY - Y.dX}{X^2 + Y^2} = dY$$

$$d\tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = \frac{X.dY - Y.dX}{X^2 + Y^2}$$

$$\therefore d\tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = dY$$

$$\tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = Y + c$$

تمـــــاريـــــن 1

I - أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$1-\quad X(2Y-3)dX + (X^2+1)dY = 0$

$2-\quad X^2(Y^2+1)dX + Y\sqrt{X^3+1}dY = 0$

$3-\quad \sqrt{2XY}\frac{dY}{dX} = 1$

$4-\quad \sin X\frac{dX}{dY} + 5\sec^2 Y\tan Y = 0$

$5-\quad Xe^Y dY + \frac{X^2+1}{Y}dX = 0$

$6-\quad Y\sqrt{2X^2+3}\,dY + X\sqrt{4-Y^2}\,dX = 0$

$7-\quad \frac{dY}{dt} - 4t^3 = 0$

عند t=5 , t=0

II – تحقق بان الدالة: $Y = \ln t$ **هي حل للمعادلة:** $t^2(\frac{d^2Y}{dt^2}) - t(\frac{dY}{dt}) + 2 = 0$

III – أوجد حل المعادلات الآتية عند النقطة المقابلة :

$(a)\quad X.dY + Y.dX = 3XY.dX$

عند Y=1 , X=1

$(b)\quad Y.dX - X.dY + dX = 4X^4.dX - dX$

عند $X = 1$, $Y = \frac{1}{3}$

$$(c) \quad \frac{dY}{dX} = e^{X+Y}$$

عند Y=1 , X=0

$$(d) \quad \frac{dY}{dX} = X^2 Y^4$$

عند Y=1 , X=1

$$(e) \quad Ye^{-X} \frac{dY}{dX} + 2 = 0$$

عند Y=2 , X=0

$$(f) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{2X}{Y + X^2 Y}$$

عند Y=4 , X=0

ب- المعادلات التفاضلية المتجانسة:

تكون المعادلة على الصورة :-

$$\frac{dY}{dX} = f(\frac{Y}{X}) \text{.............................} (1)$$

يمكن حلها بادخال متغير غير مستقل جديد v :

$$v = \frac{Y}{X} \text{...} (2)$$

$$Y = vX$$

$$\frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX} \text{.........................} (3)$$

وتصبح المعادلة رقم (1):

$$\therefore v + X\frac{dv}{dX} = f(v) \text{...................} (4)$$

ويمكن حل المعادلة (4) بفصل المتغيرات:

$$v - f(v) = -X\frac{dv}{dX}$$

$$\frac{dX}{X} = -\frac{dv}{v - f(v)}$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{dv}{v - f(v)} = 0$$

مثال 1:

بين أن المعادلة الآتية متجانسة ثم أوجد حلها .

$$(X^2 + Y^2)dX + 2XY.dY = 0$$

الحل :

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{X^2 + Y^2}{2XY}$$

بالقسمة على X^2

$$\therefore \frac{dY}{dX} = -\frac{1 + (\frac{Y}{X})^2}{2(\frac{Y}{X})} = -\frac{1 + v^2}{2v} \text{..............(1)}$$

$\therefore$ المعادلة المعطاة متجانسة وبالتإلى يمكن التعويض: $v = \frac{Y}{X}$ وإيجاد $\frac{dY}{dX}$ بدلالة v وحلها بعد ذلك بفصل المتغيرات كالاتي:-

$$\therefore \frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX}$$

بالتعويض في المعادلة (1)

$$\therefore v + \frac{1 + v^2}{2v} = -X\frac{dv}{dX}$$

$$\frac{2v^2 + 1 + v^2}{2v} = -X\frac{dv}{dX}$$

$$\frac{1 + 3v^2}{2v} = -X\frac{dv}{dX}$$

$$-\frac{dX}{X}=\frac{2v.dv}{1+3v^2}$$

$$\ln|X|+\frac{1}{3}\ln|1+3v^2|=\frac{1}{3}\ln c$$

$$X^3(1+3v^2)=c$$

$$X^3(1+3(\frac{Y}{X})^2)=c$$

مثال 2:

اثبت أن المعادلة التالية متجانسة ثم أوجد حلها.

$$(X+Y)dY+(X-Y)dX=0$$

الحل:

$$\frac{dY}{dX}+\frac{X-Y}{X+Y}=0$$

$$\frac{dY}{dX}+\frac{1-v}{1+v}=0$$

$\therefore$ المعادلة المعطاة متجانسة حيث $\frac{dY}{dX}$ دالة في v . بالتعويض عن $\frac{dY}{dX}$ من (3)

$$\therefore \quad v+X\frac{dv}{dX}+\frac{1-v}{1+v}=0$$

$$X\frac{dv}{dX}+\frac{v+v^2+1-v}{1+v}=0$$

$$X\frac{dv}{dX}+\frac{v^2+1}{1+v}=0$$

$$\frac{v+1}{v^2+1}dv+\frac{dX}{X}=0$$

$$\frac{v}{v^2+1}dv+\frac{1}{v^2+1}dv+\frac{dX}{X}=0$$

$$\frac{1}{2}\ln|v^2+1|+\tan^{-1}v+\ln|X|=\ln c$$

$$\ln\frac{X\sqrt{v^2+1}}{c}+\tan^{-1}v=0$$

وبالتعويض من المعادلة (2) عن v حيث $v = \frac{Y}{X}$

$$\therefore \ln \frac{X\sqrt{(\frac{Y}{X})^2 + 1}}{c} + \tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = 0$$

تمـــاريــــــن 2

أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية بعد إثبات إنها متجانسة:-

1- $X^2 dY + (Y^2 - XY)dX = 0$

2- $(Xe^{\frac{Y}{X}} + Y)dX - X.dY = 0$

3- $X^2.dY + (Y^2 - XY)dX = 0$

4- $(X^2 + Y^2)dY - Y^2.dX = 0$

5- $\frac{dY}{dX} = \frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{Y}$

جـ -المعادلات الخطية من المرتبة الاولى:

من المعروف ان الحد $\frac{d^2Y}{dX^2}$ من الدرجة الاولى ولكن من المرتبة الثانية بينما الحد $Y(\frac{dY}{dX})$ من الدرجة الثانية لان مجموع الاسس في Y ، $\frac{dY}{dX}$ يساوي 2.

فعندئذ تكون المعادلة التفاضلية خطية اذا كان كل حد في المعادلة من الدرجة صفر او الدرجة الأولي وتكون على الصورة:

$$\frac{dY}{dX} + P(X)Y = Q(X)$$

او:

$$dY + P(X)Y.dX = Q(X).dX \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث أن $Q(X), P(X)$ دالتان في x

بضرب المعادلة (1) في $e^{\int P(X)dX}$

$$\therefore e^{\int P(X)dX} dY + e^{\int P(X)dX} P(X)Y.dX = Q(X)e^{\int P(X)dX} dX \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$d(Ye^{\int P(X)dX}) = Yd(e^{\int P(X)dX}) + e^{\int P(X)dX} dY$$

$$= Ye^{\int P(X)dX} P(X)dX + e^{\int P(X)dX} dY \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بمقارنة المعادلتين (2) و (3)

$$\therefore d(Ye^{\int P(X)dX}) = Q(X)e^{\int P(X)dX} dX$$

بتكامل الطرفين:

$$Ye^{\int P(X)dX} = \int Q(X)e^{\int P(X)dX} dX$$

يسمى المقدار $e^{\int P(X)dX}$ بالعامل المكمل ويرمز له بالرمز ρ

مثال 1: حل المعادلة الآتية:

$$\frac{dY}{dX} + 2XY = 5X$$

الحل:

$$P = 2X \qquad , \qquad Q = 5X$$

$$\therefore \quad \rho = e^{\int P(X)dX} = e^{X^2}$$

$$\therefore Ye^{X^2} = \int 5Xe^{X^2} dX$$

$$= \frac{5}{2}e^{X^2} + c$$

مثال 2: حل المعادلة الآتية

$$\frac{dY}{dX} + Y = e^X$$

الحل:

$$P = 1 \quad , \quad Q = e^X$$

$$\therefore \quad \rho = e^{\int P(X)dX} = e^{\int dX} = e^X$$

$$\therefore \; Ye^X = \int e^X e^X dX$$

$$= \frac{1}{2}e^{2X} + c$$

$$Y = \frac{1}{2}e^X + ce^{-X}$$

مثال 3:

أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$X\frac{dY}{dX} - 3Y = X^2$$

الحل:

$$\frac{dY}{dX} - \frac{3}{X} = X$$

$$P = -\frac{3}{X} \quad , \quad Q = X$$

$$\therefore \quad \rho = e^{\int -\frac{3}{X}dX} = e^{-3\ln X} = \frac{1}{e^{3\ln X}} = \frac{1}{X^3}$$

$$\rho Y = \int \rho Q.dX + c$$

$$= \int \frac{1}{X^3}.X.dX + c = -\frac{1}{X} + c$$

$$Y = -X^2 + cX^3$$

ملاحظات:

1-

$$e^{\ln X} = X$$

$$e^{m\ln X} = X^m$$

$$e^{n+m\ln X} = X^m.e^n$$

II– قد تكون المعادلة التفاضلية الخطية في Y ، $\frac{dY}{dX}$ منفصلة او متجانسة وبالتالي يكون عندنا حرية الاختيار في الحل.

III – المعادلة الخطية في X ، $\frac{dX}{dY}$ يمكن أن تحل بنفس الطريقة السابقة باستبدال Y محل X.

تمـــــاريـــــــــن 3

أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:–

1 – $\frac{dY}{dX} + 2Y = e^{-X}$

2 – $2\frac{dY}{dX} - Y = e^{\frac{X}{2}}$

3 – $X\frac{dY}{dX} + 3Y = \frac{\sin X}{X^2}$

4 – $X.dY + Y.dX = \sin X.dX$

5 – $X.dY + Y.dX = Y.dY$

6 – $(X-1)^3\frac{dY}{dX} + 4(X-1)^2 Y = X + 1$

7 – $e^{2Y}dX + 2(Xe^{2Y} - Y)dY = 0$

8 – $(X - 2Y)dY + Y.dX = 0$

9 – $(Y^2 + 1)dX + (2XY + 1)dY = 0$

اختبارات عـــامـــة

فـــي

التكـــامـــل



اختبار رقم (1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$$1-\int(\csc X-1)^2\,dX$$

$$2-\int(X+1)^{10}(X+2)\,dX$$

$$3-\int\frac{\sin\sqrt{X}}{\sqrt{X}}\,dX$$

4-احسب قيمة: $\int\frac{X+2}{X(X-2)^2}\,dX$

5-أوجد الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية التالية حول المستقيم المفروض :

$$Y=X^2-5X+6\quad,\qquad Y=0$$

حول المحور Y

6-حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(a)\;Y.dY-4X.dX=0$$

$$(b)\;(X-2Y)dY+(Y+4X)dX=0$$

اختبار رقم (2)

احسب قيمة التكاملات الآتية:

$$1-\int X\ln X.dX$$

$$2-\int\frac{1}{\sqrt{X}}\csc^2\sqrt{X}.dX$$

$$3-\int\frac{\sqrt{X^2-9}}{X}dX$$

4-احسب قيمة : $\int_0^{\sqrt{2}}X^3e^{X^2}\,dX$

5-اوجد الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية التالية حول المستقيم المفروض:

$$Y = X^2 \quad , \quad Y = 4X - X^2$$

حول المحور X .

6–حل المعادلات التفاضلية الاتية:

$$(a)\ X.dY - Y.dX = 2X^2 dX$$

$$(b)\ \frac{dY}{dX} + \frac{2}{X}Y = 6X^3$$

اختبار رقم (3)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$$1 - \int \cos^{-1} X.dX$$

$$2 - \int \frac{3X+5}{X+2} dX$$

$$3 - \int X e^X dX$$

$$4 - \int \frac{dX}{1+\cos X}$$

5–أوجد قيمة $\int_2^{10} \sqrt{2X+3}.dX$

6–أوجد الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية التالية حول المستقيم المفروض:

$$Y = X^2 \quad , \quad Y = 4X - X^2$$

حول X=5

7–أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(a) \frac{dY}{dX} + \frac{1+Y^2}{XY^3(1+X^2)} = 0$$

$$(b) \frac{dY}{dX} - XY = X$$

اختبارات عــامــة



اختبار 1

س1(a) باستخدام التعريف أوجد المشتقة الأولى لكل من:

$i-\ f(X)=\sqrt{X}$

$ii-\ f(X)=\dfrac{1}{2X}$

(b) أوجد $\dfrac{dY}{dX}$ لكل من الدوال الآتية:

$i-f(X)=\dfrac{1}{\ln X}+\ln\dfrac{1}{X}$

$ii-\ f(X)=\dfrac{\cos 4X}{1-\sin 4X}$

س2 (a) احسب القيمة الوسيطة للدالة الآتية:

$f(X)=X+\dfrac{4}{X} \quad , \qquad 4\geq X\geq 1$

(b) اوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى: $Y=X^2-2X+3$ عند كل نقطة من نقطتي تقاطعه مع المستقيم: $Y=X+1$

(c) اوجد نقط الانقلاب للمنحنى: $Y=\dfrac{1}{2}X^4-3X^2+4X+10$

س3 اوجد $\dfrac{dY}{dX}$ لكل من الدوال:

$1-\ Y=(2X^2-1)\tan^3 5X$

$2-\ Y=\tan^{-1}e^{2X}$

$3-\ Y=3^{\sin X^2}$

$4-\ X^3+\dfrac{X}{Y}=Y$

$5-\ Y=\log\left|\dfrac{64+4}{2X-3}\right|$

س4 أوجد التكاملات الآتية:

$$1-\ \int \frac{dX}{\sqrt{X}(\sqrt{X}+1)^2}$$

$$2-\ \int (\cos 3X)\sqrt[3]{\sin 3X}\,.dX$$

$$3-\ \int X(2)^{-X^2}\,.dX$$

$$4-\ \int \frac{X^4+2X^2+3}{X^3-4X}dX$$

س5 (a) اوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$$Y=\sqrt{X} \qquad , \qquad Y=X^2$$

(b) اوجد الحجم الناتج عن دوران المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$$Y=\frac{1}{8}X^3 \qquad , \qquad Y=2X$$

حول المحور Y.

اختبار 2

س1 باستخدام التعريف أوجد المشتقة الأولي للدالة:

$$f(X)=(X^2+X)^{\frac{1}{2}}$$

س2 أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

$$1-\ f(X)=\frac{1}{(1+Z+Z^2)}$$

$$2-\ Y=\tan^{-1}e^{2X}$$

$$3-\ Y=\log \ln X$$

$$4-\ Y=\sin X^2 \cos X^2$$

$$5-\ Y=\frac{\sin X}{1-\cos X}$$

$$6-\ Y^2+2XY-X^2=\csc X$$

س3 أوجد النهاية العظمى و الصغرى و نقط الانقلاب للدالة:

$$f(X)=X^4+\frac{4}{3}X^3-4X^2$$

س4 أوجد التكاملات الآتية:

$1-\int X^2 e^{2X}\,dX$

$2-\int \frac{X^2 dX}{\sqrt{X^2-16}}$

$3-\int \frac{2e^X}{\cos e^X}\,dX$

$4-\int \sqrt{1+\cos X}\;dX$

س5 (a) أوجد المساحة المحصورة بين : $Y=5$, $Y=4X-X^2$

(b) حل المعادلات التفاضلية الآتية:-

$1-\ Xe^Y dY + X\sqrt{1-Y^2}\;dY = 0$

$2-(X-Y)dY+(X-Y)dX=0$

اختبار 3

س1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة :

$Y=\sqrt{3X^2+1}$

س2 أوجد المشتقة الأولي للدوال الآتية:

$1-\ \ Y=(X+1)(X-1)(X+2)$

$2-\ \ Y=X^2\tan^3 4X$

$3-\ \ Y=(\csc^2 2X-\cot 2X)^4$

$4-\ \ Y=\frac{\sin 2X+X^2}{\tan 2X+1}$

$5-\ \ Y=\sin^{-1}(\sin 5X)$

$6-\ \ Y=\ln(X^3+1)(\sin X^2)$

س3 أ–أوجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة للدالة:

$f(X)=\ln X^2 \qquad , \qquad 1\le X\le e$

ب–احسب القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{48.85}$

س4 أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$1-\int \frac{dX}{\sqrt{2-5X^2}}$ $\qquad$ $2-\int \frac{X-1}{X+1}dX$

$3-\int e^X(2+\cos e^X)dX$ $\qquad$ $4-\int \frac{\cot X+1}{\sin^2 X}$

س**5** أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحدد بالقطع المكافئ $Y^2=4X$

والمستقيم X=4 حول المحور Y.

س6 حل المعادلات التفاضلية الآتية:-

$1-X\frac{dY}{dX}(2Y-1)=Y(1-X)$

$2-(X^2+Y^2)dX=2XY.dY$

المراجع

1 – حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية ـ تاليف ج.ب.توماس ترجمة الدكتور موفق دعبول واخرين ـ منشورات جامعة الفاتح الطبعة الثانية ١٩٧٩

2 – حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية: تأليف وليم هـ.دورفي الدار الدولية للنشر والتوزيع . ترجمة الدكتور محمد علي محمد السمري جامعة حلوان جمهورية مصر العربية. الطبعة الثانية ١٩٩٢

3- أساسيات الرياضيات. حسين رجب مجمد. دار الفجر للنشر وانتوزيع القاهرة. الطبعة الأولي ١٩٩٨

4- Engineering formulas –Kurt Gieck. Third edition 1973 McGraw – Hill comp.

الفهـــــرس



تم بحمد الله